CONTROLE PID SINTONIZADO POR ALGORITMO GENÉTICO PARA NAVEGAÇÃO AUTÔNOMA DE QUADRICÓPTEROS

Téo Cerqueira Revoredo[1]; Welington de Souza Silva[2]; Renan Porto Vieira[3]

Resumo

Veículos autônomos têm sido agentes de mudança e inovação em diversas áreas. Nos centros urbanos, têm potencial para solucionar vários problemas do transporte moderno de bens e pessoas contribuindo para o desenvolvimento de cidades inteligentes, no campo, atuam do monitoramento de plantações à fertilização do solo e na indústria desempenham tarefas tais como transporte de equipamentos. Destacam-se os veículos aéreos não tripulados, aplicáveis em monitoramento e segurança, inspeção de estruturas, atendimento médico de urgência, busca e resgate em áreas remotas, entre outros, em especial os quadricópteros, que oferecem liberdade de movimentação, capacidade de pairar no ar e facilidade de pousar e decolar de qualquer superfície plana. Estes são, entretanto, sistemas sub atuados que apresentam desafios para serem controlados. Diversas estratégias são encontradas na literatura para controlar posição e atitude de quadricópteros, sendo a mais popular o emprego de controladores PID. Todavia, a sua sintonia ainda é tarefa complicada. Este trabalho visa contribuir nesta questão. Apresenta-se a modelagem matemática do veículo, o planejamento de trajetórias exequíveis e a implementação de controladores PID que o levam a rastreá-las. A sintonia dos dezoito ganhos envolvidos é realizada por algoritmo genético e o desempenho do controlador no seguimento de trajetórias e rejeição a perturbações é comparado ao obtido com a sintonia feita pelo método de ZieglerNichols através de um modelo computacional. Os resultados comprovam a exequibilidade da estrutura de controle e o melhor desempenho da sintonia feita por algoritmo genético.

Palavras-chave: Quadricópteros; Controle PID; Algoritmos genéticos.

Abstract

Autonomous vehicles have been agents of change and innovation in several areas. In urban centers, they have the potential to solve several problems in the modern transportation of goods and people, contributing to the development of smart cities. In the countryside, they act from monitoring crops to soil fertilization, and in industry, perform tasks such as transporting equipment. Unmanned aerial vehicles stand out, applicable in monitoring and security, inspection of structures, emergency medical care, search and rescue in remote areas, among others, especially quadcopters, which offer freedom of movement, the ability to hover in the air, and ease of landing and taking off from any flat surface. These are, however, underactuated systems that present challenges to be controlled. Several strategies are found in the literature to control the position and attitude of quadcopters, the most popular being the use of PID controllers. However, their tuning is still a complicated task. This work aims to contribute to this issue. The mathematical modeling of the vehicle, the planning of feasible trajectories and the implementation of PID controllers that allow it to track them are presented. The tuning of the eighteen gains involved is performed by genetic algorithm and the performance of the controller in trajectory tracking and rejection of disturbances is compared to that obtained with

[1] Doutor em Engenharia Mecânica (Acústica, Vibrações e Dinâmica) pelo COPPE/UFRJ, professor do Departamento de Engenharia Eletrônica e Telecomunicações da Universidade do Estado do Rio de Janeiro-UERJ. E-mail: teorevoredo@uerj.br.

[2] Mestre em Engenharia Eletrônica pela Universidade do Estado do Rio de Janeiro-UERJ. E-mail: wss30081985@gmail.com.

[3] Mestre em Controle e Automação pela Universidade do Estado do Rio de Janeiro-UERJ. E-mail: renan.porto.vieira@gmail.com.

the tuning performed by the Ziegler-Nichols method through a computational model. The results prove the feasibility of the control structure and the better performance of the tuning performed by genetic algorithm.
Keywords: Quadrotors; PID control; Genetic algorithm.

1 Introdução

Robôs móveis autônomos têm sido objeto de pesquisa e desenvolvimento há décadas e, em conjunto com outros tipos de soluções robóticas, vêm experimentando crescimento de demanda nos últimos anos. Em grandes metrópoles, por exemplo, a urbanização intensa gera perdas de funcionalidades básicas que afetam de maneira significativa a qualidade de vida da população, tais como deficiências no gerenciamento de recursos naturais e dificuldades logísticas e de mobilidade urbana as quais podem melhorar com o uso de sistemas robóticos (Weiss; Bernardes; Consoni, 2015). Os veículos autônomos têm um grande potencial para solucionar inúmeros problemas atuais do transporte moderno de bens e pessoas, contribuindo para o desenvolvimento das cidades inteligentes. A sua ampla utilização tende a reduzir a emissão de poluentes e o consumo de energia (Costa, 2018), além de proporcionar resultados econômicos e sociais positivos pela maior eficiência no gerenciamento do tráfego, na segurança rodoviária e na acessibilidade ao transporte (Maia, 2018). Eliminação de sinais de trânsito, gerenciamento do uso compartilhado dos diferentes modais, monitoração de ativos através da cidade, e atendimentos de urgência são alguns exemplos das necessidades que podem ser atendidas. Fora das cidades, os veículos autônomos também se apresentam como agentes de mudança e melhorias em diversas áreas, tais como agricultura, engenharia, cinema e militar. Os Veículos Aéreos Não Tripulados (VANTs), em particular, compõem uma classe promissora de robôs móveis, com aplicações possíveis em monitoramento e segurança, inspeção de estruturas e equipamentos, atendimento médico de urgência, entrega de produtos, na modernização da agricultura brasileira e na preservação ambiental e animal, dentre outros.

Como elementos básicos da movimentação autônoma de robôs apresentam-se o planejamento e o seguimento de trajetórias. O primeiro pode ser definido como o processo de determinar uma lei de movimento que permita a um robô movimentar-se de uma posição inicial até uma posição final, sujeito a restrições, enquanto o segundo trata do projeto de controladores que conduzam o veículo da maneira planejada. São temas fundamentais em robótica móvel, presentes em diversas aplicações tais como a movimentação de VANTs em tarefas de perseguição (Almeida, 2019), a navegação autônoma e cooperativa de múltiplos robôs (Petry, 2019), a operação de veículos agrícolas (Pinto, 2018), a movimentação robótica em ambientes acidentados (Santos, 2019) e o estacionamento de carros em cidades (Zhang, *et al*., 2020).

Nesse contexto, este trabalho pretende contribuir no tema de seguimento de trajetórias para operação autônoma de veículos aéreos não-tripulados do tipo quadrirrotor. Para tal, partindo de um modelo matemático, implementa-se computacionalmente as cinemática e dinâmica de um quadricóptero, bem como algoritmos para o planejamento de trajetórias exequíveis e o projeto de controladores (de orientação, posição e altitude) para a sua realização. A movimentação autônoma é obtida por controladores do tipo Proporcional-Integral-Derivativo (PID) cuja sintonia, inicialmente realizada pelo método da sensibilidade de Ziegler-Nichols (ZN) (Ogata, 2010), é otimizada por intermédio de um algoritmo genético.

O trabalho é organizado da seguinte maneira: A Seção 2 apresenta a modelagem matemática do quadrirrotor, a Seção 3 discorre sobre o planejamento de trajetórias realizado enquanto a Seção 4 apresenta o algoritmo de controle implementado e a Seção 5 a sua sintonia utilizando algoritmo genético. Resultados são apresentados na Seção 6 e considerações finais são feitas na Seção 7.

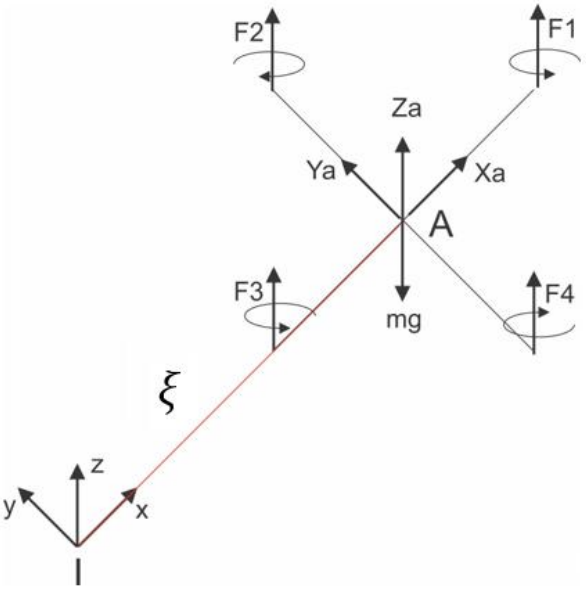
2 Modelagem

Quadricópteros são aeronaves cuja sustentação e manobrabilidade no ar é alcançada através de quatro hélices acionadas por motores independentes, sendo classificados como aeronaves de asas rotativas (Veloso, 2011). Eles possuem distinções importantes em comparação a outros tipos de aeronaves, tais como: liberdade de movimentação em qualquer direção, capacidade de pairar no ar e de voar com velocidade baixa de seus motores, além da facilidade de pousar e decolar de qualquer superfície plana, não precisando de uma pista de decolagem (Veloso, 2011). Entretanto, são aeronaves que apresentam seis graus de liberdade, sendo três coordenadas de posição no espaço tridimensional (x, y, z) e três ângulos de orientação (rolagem, arfagem e guinada), tendo apenas quatro entradas de controle, o que leva a impossibilidade de regular todos os graus de liberdade ao mesmo tempo. Este tipo de sistema é denominado sub atuado. Uma maneira de contornar o problema da sub atuação é implementar um controlador em cascata com duas malhas de realimentação, uma interna, responsável pelo controle de atitude, e outra externa, encarregada do controle de translação. Entre as estratégias propostas na literatura para realizar o controle de posição e atitude de quadricópteros, cita-se reguladores lineares quadráticos (LQR) (Bouabdallah; Noth; Siegwart, 2004), controladores por modos deslizantes (Ammar; Bouallègue; Haggège, 2016) e controle difuso (Rabhi; Chadli; Pegard, 2011). Entretanto, a técnica mais popular é o emprego de controladores do tipo PID (Florek *et al*., 2014), (Praveen; Pillai, 2016). Todavia, apesar da sua ampla utilização, a sintonia

adequada dos parâmetros desse tipo de controlador ainda é tarefa desafiadora (Cedro; Wieczorkowski, 2019), (Park, *et al*., 2021).

Seja um sistema de coordenadas fixo na aeronave denominado $A = \{x_a, y_a, z_a\}$, com origem no seu centro de massa, e um sistema de coordenadas inercial $I = \{x, y, z\}$, fixo na Terra, tal como apresentado na Figura 1, na qual , x_a é o eixo de direção de voo, y_a é ortogonal a x_a, e z_a é ortogonal ao plano $(x_a y_a)$.

Figura 1 - Sistemas de coordenadas da aeronave.



Fonte: Elaborada pelos autores

O vetor $\xi \in \Re^3$ define o posicionamento do centro de massa da aeronave em relação ao sistema de coordenadas inercial *I*, definido pela Equação (1), na qual $R_{\phi\theta\psi}$ representa a orientação de *I* com relação a *A*.

$$\xi = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (R_{\phi\theta\psi})^{-1} \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix} \tag{1}$$

Seja $V = \begin{bmatrix} V_x & V_y & V_z \end{bmatrix}^T$ o vetor de velocidades do centro de massa da aeronave descrito no sistema *A*, as componentes da velocidade linear $[\dot{x}\ \dot{y}\ \dot{z}]^T$, representadas no sistema inercial são calculadas como segue:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = (R_{\phi\theta\psi})^{-1} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} \tag{2}$$

Sejam:

$$\eta = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \omega = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \tag{3}$$

Pode-se mostrar que a velocidade angular da aeronave é:

$$\omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -sen(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & sen(\phi)\, cos(\theta) \\ 0 & -sen(\phi) & cos(\phi)\, cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = W_n \dot{\eta} \quad (4)$$

Na qual $W_n \dot{\eta}$ é denominada Matriz de Euler. As dinâmicas translacional e rotacional do quadrirrotor são obtidas por intermédio das suas energias cinética e potencial. Parte-se das seguintes hipóteses: **Hipótese 1:** A estrutura e as hélices da aeronave são rígidas e simétricas; **Hipótese 2:** O centro de massa da aeronave é também a origem do sistema de coordenadas fixo à mesma. **Hipótese 3:** A aeronave é sujeita a força de empuxo aplicada no seu centro de massa e a três torques, todos resultantes da variação da velocidade angular das quatro hélices situadas nas extremidades dos seus braços. Como passo inicial para se obter as equações de Euler-Lagrange, determina-se as coordenadas generalizadas do sistema, aqui definidas como segue:

$$q = [\xi\ \eta]^T = [x\ y\ z\ \phi\ \theta\ \psi]^T \quad (5)$$

Na qual $\eta = [\phi\ \theta\ \psi]^T \in \Re^3$ são os ângulos de Euler que representam a orientação do quadrirrotor no espaço tridimensional. As coordenadas generalizadas têm dimensão $q = [\xi\ \eta]^T \in \Re^6$. O Lagrangeano é determinado da seguinte forma:

$$L(q, \dot{q}) = E_{cTransl} + E_{cRot} - E_{pTransl} \quad (6)$$

Na qual $E_{cTransl}$ é a Energia Cinética de Translação, E_{cRot} é a Energia Cinética de Rotação e $E_{pTransl}$ é a Energia Potencial. A Energia Cinética Translacional depende da velocidade da aeronave nas coordenadas generalizadas. Representando-se a velocidade linear por $\dot{\xi} = v$, a segunda potência desta velocidade é dada por:

$$v^2 = \dot{\xi}^2(x, y, z) = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \dot{\xi}^T \xi \quad (7)$$

E a energia cinética de translação da aeronave é determinada como segue:

$$E_{cTransl} = \frac{1}{2} \int \dot{\xi}^2(x, y, z)\, dm = \frac{m}{2} \dot{\xi}^T \dot{\xi} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (8)$$

A Energia Potencial de Translação é:

$$E_{cTransl} = mgz \quad (9)$$

E o Lagrangeano translacional do sistema é dado por:

$$L_{Transl} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz \quad (10)$$

A equação de Euler-Lagrange toma a seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_{Transl}}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial L_{Transl}}{\partial \xi} = F_{\xi} \quad (11)$$

Cujas derivadas parciais são:

$$\frac{\partial L_{Transl}}{\partial \xi} = -mg \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\frac{\partial L_{Transl}}{\partial \dot{\xi}} = m\dot{\xi} \quad (13)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_{Transl}}{\partial \dot{\xi}} = m\ddot{\xi} \quad (14)$$

Chega-se, então, à dinâmica do movimento de translação:

$$m\ddot{\xi} + mg \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = F_{\xi} \quad (15)$$

Na qual F_{ξ} são as forças aplicadas ao sistema:

$$F_{\xi} = (R_{\phi\theta\psi})^{-1} F_L \quad (16)$$

Na Equação (16), $F_L \in \Re^3$ é a força resultante da soma das forças aplicadas por cada hélice da aeronave, na direção z, tal como representada na Equação (17).

$$F_L = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4 \end{bmatrix} \quad (17)$$

A força produzida em cada motor depende de uma constante $K_i > 0$, e da velocidade angular (w_i) dos mesmos:

$$\Omega_i = k_i(\omega_i)^2 \quad , i = 1, 2, 3, 4 \quad (18)$$

E a Equação (15) pode ser reescrita como:

$$m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} + mg \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (R_{\phi\theta\psi})^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

E a dinâmica do subsistema translacional é:

$$\ddot{x} = \frac{U_1}{m}(\cos(\phi)\sin(\theta)\cos(\psi) + \sin(\phi)\sin(\psi)) \quad (20)$$

$$\ddot{y} = \frac{U_1}{m}(\cos(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) - \sin(\phi)\cos(\psi)) \quad (21)$$

$$\ddot{z} = \frac{U_1}{m}(\cos(\phi)\cos(\theta)) - g \quad (22)$$

O Lagrangeano rotacional do sistema é dado por:

$$L_{ROT} = \frac{1}{2}\dot{\eta}^T \mathrm{J}(\eta)\dot{\eta} \quad (23)$$

Sendo *J*(η) a matriz jacobiana das coordenadas generalizadas da matriz inercial (*I*), representada da seguinte forma:

$$\mathrm{J}(\eta) = W_{\eta}^T I W_{\eta} \quad (24)$$

Na qual W_η é a matriz jacobiana em relação ao sistema local *A*, que relaciona a velocidade ω com $\dot{\eta}$ (Benigno, 2015). Como a estrutura do quadrirrotor é simétrica a matriz inercial é diagonal:

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \tag{25}$$

E $J(\eta)$ pode ser calculada como segue:

$$\mathrm{J}(\eta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c(\phi) & -s(\phi) \\ -s(\theta) & s(\phi)c(\phi) & c(\phi)c(\theta) \end{bmatrix} I \tag{26}$$

A equação de Euler-Lagrange é definida da seguinte forma:

$$\tau_\eta = \frac{d}{dt}\frac{\partial L_{ROT}}{\partial \dot{\eta}} - \frac{\partial L_{ROT}}{\partial \eta} \tag{27}$$

Na qual:

$$\frac{\partial L_{ROT}}{\partial \eta} = -\frac{d}{dt}(J)\dot{\eta} - \frac{1}{2}\frac{\partial y}{\partial \eta}\left(\dot{\eta}^T J \dot{\eta}\right) \tag{28}$$

$$\frac{\partial L_{ROT}}{\partial \eta} = \frac{1}{2}(J(\eta) + J(\eta)^T\dot{\eta} = J(\eta)\dot{\eta} \tag{29}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_{ROT}}{\partial \eta} = J(\eta)\ddot{\eta} \tag{30}$$

E substituindo as Equações (28) a (29) na Equação (27):

$$\tau_\eta = J(\eta)\ddot{\eta} + \frac{d}{dt}J\dot{\eta} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\dot{\eta}^T J\dot{\eta}) \tag{31}$$

Sendo τ o torque de η e $\tau\eta = [\phi\ \theta\ \psi]^T \in \Re^3$. Os torques não conservativos que atuam sobre o quadricóptero são gerados pela diferença entre as forças de cada par de motores adicionalmente ao efeito giroscópio resultante da rotação das hélices (Lima, 2015). Portanto:

$$\tau_\eta = \begin{bmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_i d(\Omega_2^2 - \Omega_4^2) + J_r\omega_y(\Omega_1 - \Omega_2 + \Omega_3 - \Omega_4) \\ K_i d(\Omega_3^2 - \Omega_1^2) + J_r\omega_x(-\Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3 + \Omega_4) \\ d(\Omega_1 - \Omega_2 + \Omega_3 - \Omega_4) \end{bmatrix} \tag{32}$$

Reorganizando a Equação (31) tem-se:

$$\tau_\eta = J(\eta)\ddot{\eta} + C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} \tag{33}$$

Na qual $C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta}$ é a matriz de Coriolis, que define os efeitos giroscópios e o sistema centrífugo (Benigno, 2015). Partindo da Equação (33) tem-se:

$$\ddot{\eta} = J^{-1}\tau_\eta - C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} \tag{34}$$

Para que a aeronave mantenha a sua estabilidade é necessário que os ângulos de rolagem, arfagem e guinada sejam muito pequenos. Assim, é possível apresentar as equações dinâmicas do subsistema rotacional do quadrirrotor da seguinte forma:

$$\ddot{\phi} = \frac{Iyy - Izz}{Ixx}\ \dot{\theta}\dot{\psi} + \frac{Jr}{Ixx}\dot{\theta}(\Omega_1 - \Omega_2 + \Omega_3 - \Omega_4) + \frac{K_i d}{Ixx}\ (\Omega_2^2 - \Omega_4^2) \quad (35)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{Izz\ -\ Ixx}{Iyy}\ \dot{\phi}\dot{\psi} + \frac{Jr}{Iyy}\dot{\phi}(-\Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3 + \Omega_4) + \frac{K_i d}{Iyy}\ (\Omega_3^2 - \Omega_1^2) \quad (36)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{Ixx - Iyy}{Izz}\ \dot{\phi}\dot{\theta} + \frac{d}{Izz}(\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2) \quad (37)$$

2.1 Linearização do modelo

A representação em espaços de estado de um sistema não linear é:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ y = g(x,u) \end{cases} \quad (38)$$

Na qual x é o vetor de estado e u é o vetor de entrada, deseja-se obter um modelo linear do tipo:

$$\begin{cases} \dot{x} = \boldsymbol{A}x + \boldsymbol{B}u \\ y = \boldsymbol{C}x + \boldsymbol{D}u \end{cases} \quad (39)$$

Sendo os vetores de estado, entrada e saída:

$$x\ =\ [\xi\ \eta]^T \quad (40)$$

$$u\ =\ [U_1\ U_2\ U_3\ U_4]^T \quad (41)$$

$$y\ =\ [x\ y\ z\ \phi\ \theta\ \psi]^T \quad (42)$$

As variáveis de estado do sistema são identificadas por x_i, i assumindo valores de 1 a 12, e são apresentadas na Tabela 1:

Tabela 1 - Variáveis de estado do sistema

$x_1 = x$	$x_2 = y$	$x_3 = z$	$x_4 = \phi$	$x_5 = \theta$	$x_6 = \psi$
$x_7 = \dot{x}$	$x_8 = \dot{y}$	$x_9 = \dot{z}$	$x_{10} = \dot{\phi}$	$x_{11} = \dot{\theta}$	$x_{12} = \dot{\psi}$

Fonte: Elaborada pelos autores.

Determina-se $f\ (x,u)$ e $g(x,u)$ como segue:

$$f\ (x,u) =\ [\ \dot{x}_i] \quad (43)$$

$$g(x,u)\ =\ [x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6]^T \quad (44)$$

O ponto de equilíbrio é:

$$\dot{x}\ =\ f\ (x,u)\ =\ 0 \quad (45)$$

Utilizando-se a matriz jacobiana, obtém-se:

$$\mathrm{A} = \frac{\partial f\ (x,u)}{\partial x} \qquad \mathrm{B} = \frac{\partial f\ (x,u)}{\partial u} \quad (46)$$

$C = \frac{\partial g\,(x,u)}{\partial x}$ $\qquad D = [0_{6x4}]$ (47)

Assim, pode-se determinar a função de transferência do quadricóptero como segue:

$$G(s) = C(sI - A) - 1B + D \tag{48}$$

3 Planejamento de trajetórias

O planejamento de trajetórias é um caso especial do problema geral de planejamento de movimentos (Heidari; Saska, 2021), o qual se apresenta tipicamente como uma tarefa de difícil solução, especialmente em sistemas com muitos graus de liberdade. Quadrirrotores são bons exemplos dessa dificuldade. Em aplicações típicas, essa classe de aeronave opera em espaços tridimensionais, tem seis graus de liberdade, é sub atuada, e possui restrições diferenciais, tais como velocidade e aceleração limitadas. Por ser desafiador, o processo de geração de trajetórias para quadricópteros vêm sendo amplamente estudado na literatura, sendo, entretanto, considerado um problema ainda em aberto. Detalhes sobre as diferentes abordagens para o planejamento de movimento de quadricópteros podem ser encontrados em Quan, *et al*. (2020) e Elmokadem & Savkin (2021). O objetivo do planejamento de trajetórias é fazer a aeronave voar de uma posição inicial até uma posição final, através da definição das velocidades de rotação das suas hélices. Uma forma de abordar o problema é separar o procedimento em duas etapas, determinando primeiro a trajetória geométrica a ser realizada, sem informações temporais e, em seguida, definindo um perfil de velocidades apropriado de modo que as condições de execução sejam satisfeitas (Sayyaadi; Soltani, 2017). Este é o princípio utilizado neste trabalho. Utiliza-se polinômios de terceiro grau para três variáveis de uma função espacial para projetar as trajetórias, de acordo com a Equação (49).

$$f(s) = \sum_{i=0}^{3} C_i s^i \tag{49}$$

Impõe-se uma lei de movimento como segue:

$$s = s(t) \tag{50}$$

As velocidade e aceleração do veículo são dadas por:

$$\dot{P} = \frac{dP}{ds}\dot{S}(t) \tag{51}$$

$$\ddot{P} = \frac{dP}{ds}\ddot{S}(t) + \frac{d^2p}{d^2s}\dot{S}(t) \tag{52}$$

Portanto, as trajetórias a serem seguidas pela aeronave são projetadas com base em pontos inicial, final e de passagem pré-definidos, especificando-se adicionalmente o tempo desejado para a sua execução em cada uma das direções de movimento. Desse modo, definem-se

trajetórias suaves para o centro de massa do quadricóptero. Quatro trajetórias de referência são utilizadas neste trabalho para validar o modelo e o algoritmo de controle proposto, sendo a principal projetada para fazer a aeronave realizar voo ao redor de uma área construída, tal como uma edificação, um conjunto de edificações ou um quarteirão de uma cidade. Partindo de um ponto inicial no solo, o quadricóptero deve decolar e subir até uma altura determinada, para em seguida realizar o contorno da região desejada em voo nivelado. Ao final, a aeronave deve pousar no mesmo ponto onde iniciou o trajeto. Esta trajetória possui paralelo com aplicações reais de filmagem, fotografia, despejo de produtos (tal como pulverização de plantações), inspeção de estruturas, dentre outros. Os polinômios que representam as posições e velocidades para o primeiro trecho da Trajetória na direção x são:

$$p_{1x}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \quad (53)$$

$$\dot{p}_{1x}(t) = a_1 + a_2 t + 3a_3 t^2 \quad (54)$$

Considerando as condições iniciais em t = 0 segundos, tem-se:

$$p_{1x}(0) = a_0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = 0 \quad (55)$$

$$\dot{p}_{1x}(0) = a_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 0 \quad (56)$$

As posição e velocidade em um ponto de passagem P_A em t = 10 segundos levam a:

$$p_{1x}(10) = 100a_2 + 1000a_3 = 0 \quad (57)$$

$$\dot{p}_{1x}(10) = 20a_2 + 300a_3 = 0 \quad (58)$$

Reorganizando a descrição do problema na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 100 & 1000 \\ 20 & 300 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (59)$$

Cuja solução apresenta os seguintes valores para a_2 e a_3:

$$a_2 = 0 \; e \; a_3 = 0 \quad (60)$$

Assim, os valores das constantes a_i e os polinômios de posição e velocidade do primeiro trecho da trajetória na direção x são:

$$a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0 \quad (61)$$

$$p_{1x}(t) = 0 \quad e \quad \dot{p}_{1x} = 0 \quad (62)$$

Os parâmetros da trajetória na direção x são resumidos na Tabela 2. O projeto dos demais trechos da segue o mesmo princípio.

Tabela 2 - Movimentação na direção x. Fonte: Os autores.

Trecho	x_0	$\dot{x}_0$	x_f	$\dot{x}_f$	$x(t)$
$P_0 - P_A$	0	0	0	0	$p_{1x}(t) = 0$
$P_A - P_B$	0	0	140	5	$p_{2x}(t) = 3.7t^2 - 0.23t^3$

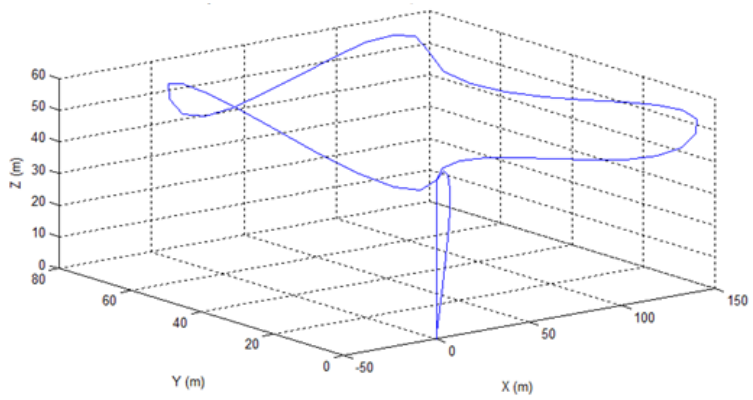
$P_B - P_C$	140	5	140	5	$p_{3x} = 140 + 5t - 1.5t^2 + 0.1t^3$
$P_C - P_D$	140	5	0	5	$p_{4x} = 140 + 5t - 5.7t^2 + 0.38t^3$
$P_D - P_A$	0	5	0	5	$p_{5x} = 5t - 1.5t^2 + 0.1t^3$
$P_A - P_0$	0	5	0	0	$p_{6x} = 5t - t^2 + 0.05t^3$

					$\dot{x}(t)$
					$\dot{p}_{1x} = 0$
					$\dot{p}_{2x} = 7.4t - 0.69t^2$
					$\dot{p}_{3x} = 5 - 3t + 0.3t^2$
					$\dot{p}_{4x} = 5 - 11.4t + 1.14t^2$
					$\dot{p}_{5x} = 5 - 3t + 0.3t^2$
					$\dot{p}_{6x} = 5 - 2t + 0.15t^2$

Fonte: Elaborada pelos autores.

Os movimentos nas direções y e z são projetados da mesma forma e a trajetória completa é observada na Figura 2.

Figura 2 - Trajetória de referência



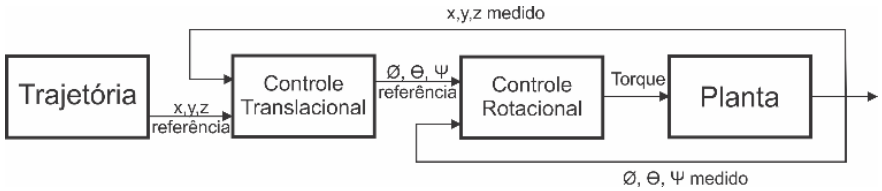
Fonte: Elaborada pelos autores

4 Controle

O esquema de controle proposto é exemplificado na Figura 3. Propõe-se o uso de controladores PID aplicados ao sistema linearizado. A sintonia inicial dos seis PIDs é realizada utilizando-se o método da sensibilidade limite de Ziegler-Nichols, com ajustes empíricos adicionais feitos em função dos desempenhos observados nas emulações computacionais. Em

seguida, um algoritmo genético é empregado para otimizar a escolha dos dezoito ganhos envolvidos com vistas e alcançar melhor desempenho.

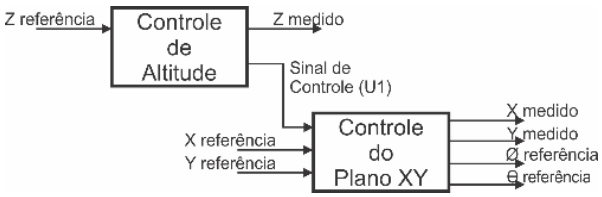
Figura 3 - Estrutura de controle



Fonte: Elaborada pelos autores

O controle translacional é implementado em duas etapas, a saber: controle de altitude e controle do movimento no plano x−y. O esquema de controle de translação é visto na Figura 4.

Figura 4 - Controle translacional



Fonte: Elaborada pelos autores

O primeiro estágio do controle de translação regula a altitude da aeronave, através do empuxo total, U_1. O movimento na direção z é descrito como segue:

$$\ddot{z} = \frac{U_1}{m}\cos(\phi)\cos(\theta) - g \tag{63}$$

Que pode ser representada no espaço de estados como:

$$\dot{x} = f\big(x(t), u(t)\big) = \begin{bmatrix} \omega_0(t) \\ \frac{U_1}{m}\cos(\phi)\cos(\theta) - g \end{bmatrix} \tag{64}$$

Na qual $x(t) = [\omega_z(t) \;\; z(t)]^T$ é o vetor de estado, sendo $z(t)$ a altitude e $\omega_z(t)$ a velocidade linear da aeronave na direção z com relação ao sistema de coordenadas inercial. Linearizando a Equação (64) através da sua série de Taylor e desconsiderando os termos de ordem superior, tem-se:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m}\cos(\phi)\cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 0] \tag{65}$$

A descrição do sistema linearizado no espaço de estados é:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z(t) \\ \omega_z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m}\cos(\phi)\cos(\theta) \end{bmatrix} U_1 \tag{66}$$

$$y = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} z(t) \\ \omega_z(t) \end{bmatrix} \tag{67}$$

Nota-se que a dinâmica de altitude é representada por um sistema de segunda ordem, instável por ter polos na origem do plano complexo. Para estabilizar sistemas desse tipo com controladores que combinam ações PID, deve-se observar as raízes da equação característica do sistema resultante da adição de cada uma dessas ações, pois, dependendo dos ganhos associados, as raízes podem ou não estar situadas no semiplano esquerdo do plano complexo. Pode-se mostrar que se apenas a ação proporcional for utilizada a equação característica terá raízes complexas puras resultando em sistemas instáveis oscilatórios independente da escolha do valor do ganho (Silva, 2014), (Nise, 2009). Portanto, a ação proporcional sozinha não é capaz de estabilizar o sistema. Caso as ações PI sejam utilizadas de maneira conjunta, a equação característica apresenta três raízes, sendo uma nula, uma real positiva e outra real negativa, independentemente da escolha dos ganhos dos controladores, ou seja, o sistema resultante é também instável. Por outro lado, ao se combinar as ações PD, a equação resultante pode possuir raízes no semiplano esquerdo dependendo dos ganhos escolhidos para os controladores, o que significa que é possível estabilizar sistemas de segunda ordem utilizando controladores PD. Entretanto, ao se utilizar as três ações de controle de maneira conjunta, além de alcançar estabilidade, o controlador pode também eliminar completamente o erro em regime e perturbações constantes por conta da ação integral (Nise, 2009), (Ogata, 2010). Assim, especifica-se aqui o controlador PID para realizar a regulação da altitude do quadricóptero. As equações dinâmicas que descrevem o movimento no plano $x - y$ (Lima, 2015), são:

$$\ddot{x} = \frac{U_1}{m}(\cos(\phi)\sin(\theta)\cos(\psi) + \sin(\phi)\sin(\psi)) \tag{68}$$

$$\ddot{y} = \frac{U_1}{m}(\cos(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) + \sin(\phi)\cos(\psi)) \tag{69}$$

Reescrevendo as equações acima na forma $\dot{x} = f\,(x(t), u(t))$, sendo o vetor de estado $x(t) = [x(t)\ V_x(t)\ y(t)\ V_z(t)]^T$ que correspondem as posições ($x(t)$ e $y(t)$) e as velocidades lineares V_x e V_y em relação ao sistema de coordenadas *I*, tem-se:

$$\dot{x} = f\big(x(t), u(t)\big) = \begin{bmatrix} V_x(t) \\ \frac{U_1(t)}{m} u_x(t) \\ V_y(t) \\ \frac{U_2(t)}{m} u_y(t) \end{bmatrix} \tag{70}$$

Na qual o vetor de entradas é $u(t) = \left[u_x\ u_y\right]^T$. Sendo $u_x = \cos(\phi)\text{sen}(\theta)\cos(\psi) + \text{sen}(\phi)\text{sen}(\psi)$ e $u_y = \cos(\phi)\text{sen}(\theta)\text{sen}(\psi) - \text{sen}(\phi)\cos(\psi)$. A linearização leva a:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{U_1(t)}{m} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{U_1(t)}{m} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{71}$$

Seguindo o mesmo princípio, especificam-se controladores PID para realizar a atuação sobre as variáveis $x(t)$ e $y(t)$. O sistema de controle rotacional tem por objetivo regular a atitude da aeronave para o desempenho da trajetória de referência, atuando, portanto, sobre as variáveis ϕ, θ e ψ. As equações dinâmicas que descrevem a orientação do quadricóptero são:

$$\ddot{\phi} = \frac{Iyy - Izz}{Ixx}\ \dot{\theta}\dot{\psi} + \frac{Jr}{Ixx}\dot{\theta}(\Omega_1 - \Omega_2 + \Omega_3 - \Omega_4) + \frac{K_i d}{Ixx}\ (\Omega_2^2 - \Omega_4^2) \tag{72}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{Izz - Ixx}{Iyy}\ \dot{\phi}\dot{\psi} + \frac{Jr}{Iyy}\dot{\phi}(-\Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3 + \Omega_4) + \frac{K_i d}{Iyy}\ (\Omega_3^2 - \Omega_1^2) \tag{73}$$

$$\ddot{\psi} = \frac{Ixx - Iyy}{Izz}\ \dot{\phi}\dot{\theta} + \frac{d}{Izz}(\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2) \tag{74}$$

Cuja representação no espaço de estados é:

$$\dot{x} = f\big(x(t), u(t)\big) = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \frac{(Iy - Iz)}{Ix}\ \dot{\theta}\dot{\psi} + \frac{Jr\dot{\Omega}_r\dot{\theta}}{Ix} + \frac{\tau\phi}{Ix} \\ \dot{\theta} \\ \frac{(Iz - Ix)}{Iy}\ \dot{\phi}\dot{\psi} + \frac{Jr\dot{\Omega}_r\dot{\phi}}{Iy} + \frac{\tau\theta}{Iy} \\ \dot{\psi} \\ \frac{(Ix - Iy)}{Iz}\dot{\phi}\dot{\theta} + \frac{\tau\psi}{Iz} \end{bmatrix} \tag{75}$$

Na qual $x(t) = \left[\phi\ \dot{\phi}\ \theta\ \dot{\theta}\ \psi\ \dot{\psi}\right]^T$ é o vetor de estado composto pelas posições e velocidades angulares da aeronave e $u(t) = \left[\tau_\phi\ \tau_\theta\ \tau_\psi\ \right]^T$ é o vetor de entrada, composto pelos torques aplicados nos eixos ($\phi\ \theta\ \psi$), respectivamente. As matrizes que definem o sistema linearizado são:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{Ix} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_z} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{76}$$

O sistema de controle de atitude tem como parte das suas entradas dois sinais ϕ_{ref} e θ_{ref}, oriundos do sistema translacional, como pode ser visto na Figura 3. A relação entre esses sinais é apresentada a seguir. Com base nas Equações (21) e (22) e considerando que os ângulos $\phi_{ref}\ e\ \theta_{ref}$ são pequenos, tem-se:

$$\ddot{x} = \frac{U_1}{m}\left(\theta_{ref}\cos(\psi) + \phi_{ref}\sin(\psi)\right) \tag{77}$$

$$\ddot{y} = \frac{U_1}{m}\left(\theta_{ref}\sin(\psi) + \phi_{ref}\cos(\psi)\right) \tag{78}$$

Reorganizando na forma matricial, chega-se a:

$$\begin{bmatrix}\phi_{ref}\\ \theta_{ref}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sin(\psi) & \cos(\psi)\\ -\cos(psi) & \sin(\psi)\end{bmatrix}^{-1}\left(\frac{m}{U_1}\right)\begin{bmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{bmatrix} \tag{79}$$

5 Sintonia com algoritmo genético

Para otimização dos ganhos dos controladores, propõe-se a aplicação de um algoritmo genético (GA), o qual busca soluções variando suas entradas de acordo com parâmetros objetivos. Para valorizar a exploração do espaço de busca são aplicadas mutações individuais nos cromossomas, enquanto se trabalha para unir as suas melhores características em busca de melhores avaliações por meio do cruzamento entre eles. Em seguida, a seleção natural conhecida pela teoria Darwiniana é representada por uma função responsável por selecionar os indivíduos que compõe a população seguinte. Dentre as diversas implementações possíveis para a escolha dos mais aptos, o algoritmo de sintonia aqui implementado utiliza a proposta para otimização de funções feita por (Houck; Joines; Kay, 1995). Trata-se de uma estrutura que avalia um grupo (população) de informações de entrada (indivíduos) e apura a trajetória resultante de melhor aptidão, arbitrada nas gerações. Dado o objetivo do controlador em seguir uma trajetória de referência, a função de custo considera os erros quadráticos médios de distância e orientação entre as trajetórias de referência e efetuada pelo veículo. Define-se, dessa maneira, a função de custo:

$$f_c = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sqrt{E_{x_i}^2 + E_{yi}^2 + E_{z_i}^2} + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sqrt{E_{\phi_i}^2 + E_{\theta i}^2 + E_{\psi_i}^2} \tag{81}$$

Na qual E_{x_i}, E_{yi} e E_{z_i} são os erros de distância e E_{ϕ_i}, $E_{\theta i}$ e E_{ψ_i} são os erros de inclinação referenciados a cada eixo cartesiano e i a interação correspondente. Os parâmetros do GA utilizado são apresentados na Tabela 3.

Tabela 3 - Parâmetros do algoritmo genético

Parâmetro	Especificações
Representação	Binária
Domínio	-80 até 80
Exatidão	1μ
Aptidão	Avaliação
População	30
Gerações	30
Taxa de *crossover*	60%
Taxa de mutação	4%
Função de seleção	Seleção por Roleta

Fonte: Elaborada pelos autores

Visando verificar a capacidade de generalização do algoritmo, uma trajetória diferente das projetadas para a aplicação foi empregada no processo de sintonia.

6 Resultados

O modelo matemático apresentado e os controladores são implementados computacionalmente em ambiente Matlab/Simulink (Matlab, 2018). Os parâmetros do quadrirrotor utilizados na implementação são aqueles do modelo Ar.Drone 2.0 (Parrot, 2021), sendo os principais apresentados na Tabela 4.

Tabela 4 - Parâmetros do algoritmo genético

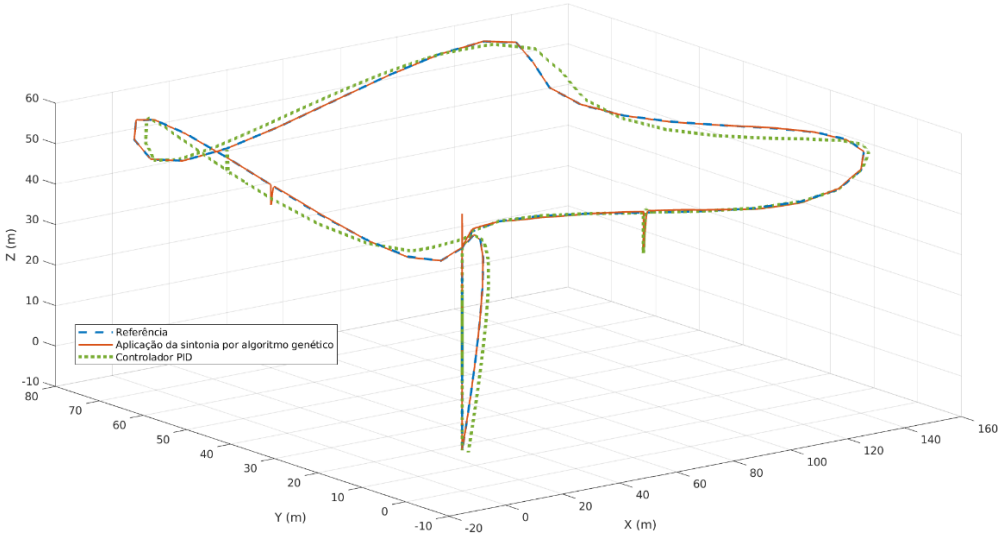
Parâmetro	Especificações
Massa Total da Aeronave (Kg)	0.890
Momento de inércia em x (Kg.m²)	9.57×10^{-3}
Momento de inércia em y	18.57×10^{-3}
Momento de inércia em z	25.55×10^{-3}
Comprimento do Braço (m)	0.152
Coeficiente de Arrasto (Nms²)	1.4×10^{-5}
Coeficiente de Empuxo (Ns²)	8.7×10^{-5}

Fonte: Elaborada pelos autores

A Figura 7 apresenta a trajetória desempenhada pelo veículo enquanto controlado para seguir a referência sujeito a diversas perturbações verticais ao longo do caminho. Nota-se que os controladores sintonizados tanto pelo método de Ziegler-Nichols quando pelo algoritmo genético são capazes de fazer a aeronave seguir a trajetória de referência de maneira geral,

atuando para eliminar os erros resultantes das perturbações às quais ela é submetida. Entretanto, o desempenho alcançado com o algoritmo cujos ganhos foram ajustados com o AG são substancialmente melhores. Enquanto o algoritmo de controle sintonizado pelo método de Ziegler-Nichols leva a erro médio de 17,56 cm, a sintonia por algoritmo genético reduz esse valor para 3,05 cm, uma melhoria de 82,63%.

Figura 5 - Trajetória desempenhada pela aeronave



Fonte: Elaborada pelos autores

Os algoritmos foram também avaliados na realização de outras três trajetórias com características diferentes, a saber: Uma definida para que emule a passagem por sobre uma construção (por exemplo, um edifício) de 20 metros de altura, partindo de um ponto inicial no solo e tendo que pousar num ponto final específico, também no solo, do outro lado da construção, uma segunda com forma espiral com objetivo de ressaltar o desempenho da aeronave ao desempenhar movimentos circulares em subida com paralelo no mundo real em aplicações tais como operações de busca e salvamento em ambientes selvagens e uma terceira trajetória para avaliar o desempenho da aeronave em percursos circulares com nível de voo constante. A Tabela 4 resume os resultados obtidos.

Tabela 4 - Erros de distância obtidos para as diferentes trajetórias

Trajetória	Erro (m)		% de melhoria
	Ziegler-Nichols	Algoritmo Genético	
Voo sobre edifício	0,0458	0,0075	83,62
Trajetória helicoidal	0,0575	0,0081	85,91
Voo circular pairado	0,5089	0,0122	97,60

Fonte: Elaborada pelos autores

Nota-se que o ajuste dos ganhos do controlador PID com o algoritmo genético proposto melhora significativamente o desempenho da aeronave ao executar todas as trajetórias consideradas.

7 Conclusão

Neste trabalho a modelagem, o planejamento e o controle de movimentos de um veículo quadrirrotor autônomo são apresentados. O planejamento de trajetórias é realizado com base na parametrização polinomial para as três direções ortogonais de movimento e o esquema de controle proposto vale-se de duas malhas de realimentação distintas para controlar os seis graus de liberdade a partir dos quatro sinais de atuação possíveis. Ações de controle proporcionais-integrais-derivativas são utilizadas para cada variável manipulada, levando a um problema de sintonia com 18 ganhos distintos. Após o ajuste de ganhos usando o método da sensibilidade limite de Ziegler-Nichols, com ajustes empíricos adicionais, uma otimização valendo-se de algoritmo genético é aplicada levando a melhoria significativa no desempenho dos controladores. Como exemplo de aplicação/validação, apresenta-se resultados simulados para quatro trajetórias de características distintas, os quais comprovam a capacidade do algoritmo de controle de fazer o quadricóptero seguir a referência mesmo sujeito a perturbações e o melhor desempenho da sintonia por algoritmo genético.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior Brasil (CAPES) Código de Financiamento 001. Os autores agradecem também à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ) pelo seu suporte financeiros no desenvolvimento deste trabalho.

Referências

ALMEIDA, J. P. L. S. **Planejamento de trajetórias para quadricópteros em tarefas de perseguição**. 2019. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica e Informática Industrial) - Universidade Federal de Uberlândia, 2019. Disponível em:https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/4262. Acesso em: 11 jul. 2025.

AMMAR, N. B.; BOUALLEGUE, S.; HAGGEGE, J. Modeling and sliding mode control of a quadrotor unmanned aerial vehicle. In: **3rd International Conference on Automation, Control, Engineering and Computer Science**, p. 834-840, 2016. Disponível em: https://cnpsi.com/PET/Acecs-2016/134.pdf. Acesso em: 11 jul. 2025.

BENIGNO, T. C. P. **Modelagem matemática e controle de atitude e posição do Quadrotor.** 2015. Dissertação (Mestrado em Sistemas de Comunicação e Automação) - Programa de Pós-Graduação em Sistemas de Comunicação e Automação, Universidade Federal Rural do Semi-Árido-UNIFERSA, Mossoró-RN, 2015. Disponível em: https://repositorio.ufersa.edu.br/handle/tede/538. Acesso em: 11 jul. 2025.

BOUABDALLAH, S.; NOTH, A.; SIEGWART, R. Pid vs lq control techniques applied to an indoor micro quadrotor. In: **2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS) (IEEE Cat. No.04CH37566)**, vol. 3, p. 2451-2456, 2004. Disponível em:https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/1389776. Acesso em: 11 jul. 2025.

CEDRO, L.; WIECZORKOWSKI, K. Optimizing PID controller gains to model the performance of a quadcopter. **Transportation Research Procedia**, v. 40, p. 156-169, 2019. Disponível em:https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2352146519301875. Acesso em: 11 jul. 2025.

COSTA, J. A. F. D. **Análise dos Impactos Energéticos de Veículos Autónomos**. 2018. Dissertação (Mestrado Integrado em Engenharia da Energia e do Ambiente) – Departamento de Engenharia Geográfica, Geofísica e Energia, Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2018. Disponível em:https://repositorio.ulisboa.pt/bitstream/10451/35282/1/ulfc121855_tm_Jo%c3%a3o_Costa.pdf. Acesso em: 11 jul. 2025.

ELMOKADEM, T.; SAVKIN, A. V. Towards fully autonomous UAVs: A survey. **Sensors**, v. 21, n. 18, p. 6223, 2021. Disponível em:https://www.mdpi.com/1424-8220/21/18/6223. Acesso em: 11 jul. 2025.

FLOREK, M. *et al*. Comparing approaches to quadrocopter control. In: **2014 23rd International Conference on Robotics in Alpe-Adria-Danube Region (RAAD).** IEEE, 2014. p. 1-6. Disponivel em:https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/7002241. Acesso em: 11 jul. 2025.

HEIDARI, H.; SASKA, M. Trajectory planning of quadrotor systems for various objective functions. **Robotica**, v. 39, n. 1, p. 137-152, 2021. Disponível em:https://www.cambridge.org/core/journals/robotica/issue/8A8A13139C98351A28A7E5673666871D. Acesso em: 11 jul. 2025.

HOUCK, C. R.; JOINES, J.; KAY, M. G. A genetic algorithm for function optimization: a Matlab implementation. **Ncsu-ie tr**, v. 95, n. 09, p. 1-10, 1995.

LIMA, G. V. **Modelagem dinâmica e controle para navegação de um veículo aéreo não tripulado do tipo quadricóptero**, 2015. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - Universidade Federal de Uberlândia-UFU, Uberlândia, 2015. Disponível em:https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/14608. Acesso em: 11 jul. 2025.

MAIA, I. C. P. S. **Veículos autónomos: dos impactos à definição de estratégias de política e planeamento urbano**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Urbana) – Escola de Engenharia, Universidade do Minho, Braga, 2018. Disponível em: https://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/59745. Acesso em: 11 jul. 2025.

MATLAB: versão 9.4.0 (R2018a). Natick, Massachusetts: The MathWorks, 2018. Disponível em:https://www.mathworks.com/products/matlab.html. Acesso em: 11 jul. 2025.

NISE, N. S. **Engenharia de Sistemas de Controle**. LTC, 2009.

OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. 5a ed. São Paulo: Pearson, 2010.

PARK, D. *et al*. Online tuning of pid controller using a multilayer fuzzy neural network design for quadcopter attitude tracking control. **Frontiers in Neurorobotics**, v. 14, p. 619350, 2021. Disponível em:https://www.frontiersin.org/journals/neurorobotics/articles/10.3389/fnbot.2020.619350/full. Acesso em: 11 jul. 2025.

PARROT. S.A. **AR.Drone user guide**. Paris: Parrot S.A., 2021. Disponível em:http://ardrone2.parrot.**com**/support. Acesso em: 11 jul. 2025.

PETRY, G. R. **Navegação de um robô móvel em ambiente semiestruturado**. Trabalho de Conclusão (Graduação em Engenharia de Controle e Automação-COMGRAD-CCA) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul-UFRGS, 2019. Disponível em:http://hdl.handle.net/10183/205363. Acesso em: 11 jul. 2025.

PINTO, R. M. **Geração e controle de trajetória ponto a ponto para veículos agrícolas de grande porto**. 2018. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo-USP, São Carlos, 2018. Disponível em:https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/18/18145/tde-05122018-164215/en.php. Acesso em: 11 jul. 2025.

PRAVEEN, V.; PILLAI, A. Modeling and simulation of quadcopter using PID controller. **International Journal of Control Theory and Applications**, v. 9, n. 15, p. 7151-7158, 2016. Disponível em:https://serialsjournals.com/abstract/21472_24.pdf. Acesso em: 11 jul. 2025.

QUAN, L. *et al*. Survey of UAV motion planning. **IET Cyber-systems and Robotics**, v. 2, n. 1, p. 14-21, 2020. Disponível em:https://ietresearch.onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1049/iet-csr.2020.0004. Acesso em: 11 jul. 2025.

RABHI, A.; CHADLI, M.; PÉGARD, C. Robust fuzzy control for stabilization of a quadrotor. In: **2011 15th International Conference on Advanced Robotics (ICAR). IEEE**, Tallinn, Estonia, 2011, pp. 471-475. Disponível:https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/6088629. Acesso em: 11 jul. 2025.

SANTOS, A. S. **Planejamento de caminhos para robôs móveis em ambientes acidentados**. 2019. Dissertação (Mestrado em Instrumentação, Controle e Automação de Processos de Mineração) - Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto-UFOP, Ouro Preto, 2019. Disponível em:https://www.repositorio.ufop.br/items/ff30c4d8-e435-4dfc-81c7-9a3f237581da. Acesso em: 11 jul. 2025.

SAYYAADI, H.; SOLTANI, A. Decentralized polynomial trajectory generation for flight formation of quadrotors. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics**, v. 231, n. 4, p. 690-707, 2017. Disponível em:https://journals.sagepub.com/doi/abs/10.1177/1464419317694277. Acesso em: 11 jul. 2025.

SILVA, A. T. **Controle de posição com restrição à orientação de um Veículo Aéreo Não-Tripulado tipo Quadrirrotor**. 2014. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica e de Computação) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte-UFRN, Natal, 2014. Disponível em:https://repositorio.ufrn.br/server/api/core/bitstreams/bd83a63f-5928-446b-8490-c22057befdb1/content. Acesso em: 11 jul. 2025.

VELOSA, C. M. N. **Controlo da posição e da atitude de um quadrotor por referências programáveis**. 2011. Dissertação (Mestrado em Engenharia Aeronáutica) - Universidade da Beira Interior, Covilhã-Portugal, 2011. Disponível em: https://www.proquest.com/openview/a970e6d08e8c6bbc1bc608ddb36cfc72/1?pq-origsite=gscholar&cbl=2026366&diss=y. Acesso em: 11 jul. 2025.

WEISS, M. C.; BERNARDES, R. C.; CONSONI, F. L. Cidades inteligentes como nova prática para o gerenciamento dos serviços e infraestruturas urbanos: a experiência da cidade de Porto Alegre. **Urbe. Revista Brasileira de Gestão Urbana**, v. 7, p. 310-324, 2015. Disponível em:https://doi.org/10.1590/2175-3369.007.003.AO01. Acesso em: 11 jul. 2025.

ZHANG, J. Z. et al. Trajectory planning and tracking control for autonomous parallel parking of a non-holonomic Vehicle. **Measurement and Control**, vol. 53(9-10), p.1800-1816, 2020. Disponível em: https://journals.sagepub.com/doi/pdf/10.1177/0020294020944961. Acesso em: 11 jul. 2025.