

# ANÁLISE COMPARATIVA DE MODELOS ANALÍTICOS PARA SIMULAÇÃO DAS DESCARGAS DE BATERIAS DE LI-PO UTILIZADAS EM DISPOSITIVOS MÓVEIS

Julia Giehl Zart<sup>1</sup>; Livia Bittencourt Gomes<sup>2</sup>; Douglas Joziel Bitencourt Freitas<sup>3</sup>; Airam Teresa Zago Romcy Sausen<sup>4</sup>; Paulo Sérgio Sausen<sup>5</sup>

## Resumo

Neste artigo é realizado o estudo e a aplicação de modelos analíticos, como, o modelo Linear, a Lei de Peukert, a Lei de Peukert Estendida, o modelo Cinético de Manwell-McGowan e o modelo de difusão de Rakhmatov e Vrudhula, com o objetivo de realizar uma análise comparativa considerando o mesmo cenário de simulação para perfis de descargas constantes e assim verificar qual modelo analítico é de fácil implementação e realiza a predição do tempo de vida de baterias com acurácia. Este mesmo cenário de simulação, significa que, para todos os modelos é utilizado os mesmos perfis de descarga, a implementação na ferramenta computacional Matlab é realizada considerando o mesmo método de estimação de parâmetros, assim como, a estrutura dos algoritmos segue o mesmo padrão. Para a realização das simulações dos modelos, é utilizado um conjunto de dados experimentais proveniente do processo de descarregamento de baterias de Lítio Íon Polímero (Li-Po) obtido através de uma plataforma de testes. A partir da avaliação dos resultados, observa-se que todos os modelos são considerados acurados, com erro médio menor que 5%, valor considerado pela literatura de boa precisão, por outro lado, o modelo Lei de Peukert Estendida obteve melhor acurácia com erro médio de 1,08%, obtendo rendimento 66% superior quando realizada a comparação com os dados obtidos pelas simulações, com os dados experimentais e entre os modelos.

**Palavras-chave:** Matemática, Modelos Analíticos, Tempo de Vida.

## Abstract

The present article presents the study and application of analytical models, such as Linear Model, Peukert's law, extension of Peukert's law, Kinetic Battery Model of Manwell and McGowan and Diffusion Model of Rakhmatov and Vrudhula. The objective is to realize a comparative analysis considering the same simulation scenario for constant discharge profiles, thus verifying which analytic model is of easy implementation and predicts accurately the battery lifetime. This same simulation scenario means that the same discharge profiles are used for all the models. The implementation on the *Matlab* computational tool is performed considering the same parameter estimation method, just as the algorithms structure follows the same pattern. To perform the model simulations, a set of experimental data from the discharge process of Lithium Ion Polymer's batteries obtained through a test platform is used. The results evaluation demonstrates that all models are considered accurate, with an average error of less than 5%, a value considered by the literature with good accuracy. On the other

<sup>1</sup> Mestranda do Programa de Pós Graduação em Modelagem Matemática na Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul - Unijuí; e-mail: julia\_zarte@hotmail.com.

<sup>2</sup> Mestranda do Programa de Pós Graduação em Modelagem Matemática na Universidade Regional do Rio Grande do Sul - Unijuí; e-mail: liviabgomes@yahoo.com.br.

<sup>3</sup> Doutorado do Programa de Pós Graduação em Modelagem Matemática na Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul - Unijuí; e-mail: douglasjoziel@outlook.com.

<sup>4</sup> Professora Doutora do Programa de Pós Graduação em Modelagem Matemática na Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul - Unijuí; e-mail: airam@unijui.edu.br.

<sup>5</sup> Professor Doutora do Programa de Pós Graduação em Modelagem Matemática na Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul - Unijuí; e-mail: sausen@unijui.edu.br.

hand, the extension of Peukert's law model obtained better accuracy with an average error of 1,08%, reaching 66% higher yield when compared with the data obtained by simulations, with the experimental data and between the models.

**Keywords:** Mathematical Modeling, Analytical Models, Lifetime.

## **Introdução**

A utilização de dispositivos móveis, tais como, celulares, smartphones e tablets, vem crescendo a cada ano. Este crescimento, em grande parte, é devido à mobilidade e praticidade que os dispositivos móveis oferecem ao usuário, visto que são alimentados por uma bateria, de forma que não necessitam estar permanentemente conectados a uma fonte de energia. Destaca-se que a bateria possui capacidade finita, necessitando ser recarregada a cada intervalo de tempo, assim, o tempo de operacionalidade de um dispositivo móvel depende do tempo de vida da bateria que o alimenta.

No intuito de desenvolver baterias cada vez menores, mais leves, com melhor desempenho e durabilidade, torna-se importante possuir um método capaz de prever tanto o tempo de vida da bateria, quanto o comportamento dinâmico do processo de descarga. Uma maneira de realizar esta previsão é através de experimentos físicos, porém, dependendo das características da aplicação, esta é uma opção economicamente inviável. Outra forma de realizar esta previsão é através de modelos matemáticos que simulam a descarga de energia da bateria a partir de suas características físicas, ou de um conjunto de dados obtidos em ensaios experimentais.

Inserido neste contexto, o Grupo de Automação Industrial e Controle (GAIC), da Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul (UNIJUÍ), com o intuito de verificar qual é o modelo matemático mais apropriado para simular e prever o comportamento dinâmico de descarga de baterias, realiza estudos, implementações e proposições de novos modelos para a previsão do tempo de vida de baterias utilizadas em dispositivos móveis. Dentre as categorias já estudadas destacam-se: os modelos elétricos, os modelos analíticos, os modelos via identificação de sistemas e os modelos híbridos (FREITAS, 2015; OLIVEIRA, 2012; SCHNEIDER, 2011).

Desta forma, buscando dar continuidade aos estudos realizados no GAIC, o objetivo principal deste artigo consiste em estudar e aplicar os modelos analíticos: Linear, Lei de Peukert, Lei de Peukert Estendida, modelo Cinético de Manwell-McGowan (KiBaM), e o modelo analítico de difusão de Rakhmatov e Vrudhula (RV), considerando o mesmo cenário de simulação, para baterias de Lítio Íon Polímero (Li-Po), com o propósito de realizar uma

análise comparativa entre eles e assim verificar qual modelo analítico realiza a predição do tempo de vida de baterias de forma mais acurada, considerando perfis de correntes constantes.

O restante deste artigo está organizado da seguinte forma. Na Seção 1 são apresentadas as principais características e propriedades de uma bateria. Na Seção 2 são descritos os modelos matemáticos, presentes na literatura técnica, utilizados na predição do tempo de vida de baterias. Na Seção 3 são apresentados os modelos analíticos utilizados nesta pesquisa. Na Seção 4 são apresentados os dados utilizados para a estimação e a validação dos modelos, o método para estimar os seus parâmetros empíricos e a plataforma de testes utilizada para a coleta dos dados experimentais. Na Seção 5 são apresentados os resultados das simulações, na qual os resultados simulados pelo modelo são comparados com os resultados experimentais. E, por fim, na Seção 6 são apresentadas as considerações finais deste estudo e os trabalhos futuros.

## **1 Características das baterias**

As baterias são dispositivos que convertem a energia química armazenada em energia elétrica a partir de uma reação eletroquímica de oxirredução. Diferentes tipos de baterias recarregáveis foram desenvolvidos ao longo do tempo, a fim de aprimorar especificidades de tamanho, peso, toxicidade e vida útil, como, por exemplo, as baterias de Níquel-Cádmio (Ni-Cd), Chumbo-Ácido (Pb-Ácido), Níquel-Metal-Hidreto (Ni-MH), Alcalina Recarregável, Lítio Íon (Li-Íon) e Lítio Íon Polímero (Li-Po). Destaca-se que as duas últimas são muito utilizadas em dispositivos móveis. Em geral, as baterias são constituídas por uma ou mais células eletroquímicas que estão ligadas em série, paralelo, ou através de uma combinação de ambas (IGLESIAS, 2012). A célula eletroquímica de uma bateria é formada por três elementos principais: dois eletrodos (i.e., ânodo e cátodo), que são condutores metálicos por onde uma corrente elétrica entra ou sai do sistema, e um eletrólito, que é um condutor iônico sólido ou líquido que proporciona o meio físico para a transferência de carga e separa os eletrodos (JONGERDEN; HAVERKORT, 2008a, 2008b; SAUSEN, 2008).

Durante um processo de descarga (i.e., consumo de energia) o ânodo libera elétrons para o sistema, enquanto o cátodo recebe elétrons do sistema. Como os elétrons são originados por reações eletroquímicas que ocorrem na bateria, são chamados de espécies eletroativas (JONGERDEN; HAVERKORT, 2008a; SAUSEN, 2008). As reações eletroquímicas que ocorrem no interior de uma bateria produzem duas importantes propriedades: a tensão,

medida em volts (V), e a capacidade, normalmente medida em ampère-hora (Ah), o produto destas duas grandezas fornece a energia armazenada na bateria (JONGERDEN; HAVERKORT, 2008a; SAUSEN, 2008). Em uma bateria ideal, a tensão permanece constante em todo o processo de descarga, tornando-se nula quando a bateria estiver completamente descarregada. Teoricamente, considerando uma corrente de descarga constante, uma bateria de 80 Ah, fornece ao sistema 80 A por 1 h ou, 20 A por 4 h. Porém, em casos reais, a descarga não é constante, pois estão presentes durante o processo de descarga alguns efeitos não lineares (i.e., efeito de recuperação e o efeito da taxa de capacidade), que influenciam diretamente na capacidade da bateria e no seu tempo de vida, por isso devem ser considerados.

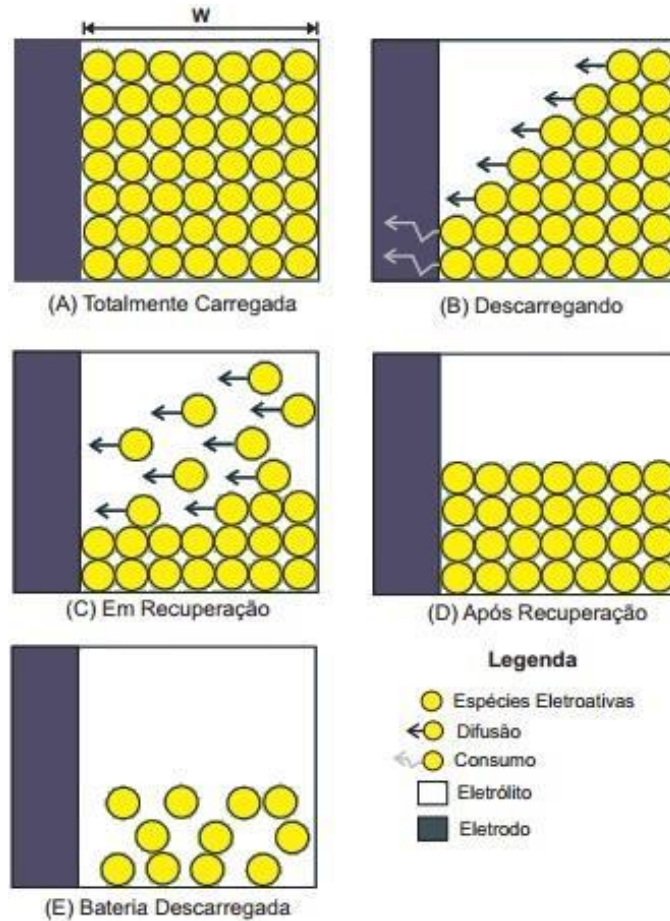
O nível de *cutoff* é uma característica que está presente no processo de descarga e, assim como os efeitos não lineares, influencia no tempo de vida da bateria. Este é definido como o limite mínimo de carga em que a bateria consegue gerar uma tensão suficiente para o dispositivo manter-se em funcionamento. Durante o processo de descarga, ao ser atingido este valor, a bateria não se encontra completamente descarregada, mas inapta de fornecer energia ao dispositivo móvel, devido à impossibilidade de ocorrer as reações eletroquímicas responsáveis pelo fornecimento de energia (SAUSEN, 2008; SCHNEIDER, 2011).

Dentre os efeitos não lineares que ocorrem durante a descarga da bateria, destacam-se pelo menos dois efeitos que afetam a sua vida útil e a quantidade de energia, tendo menor ou maior influência dependendo do tipo de bateria. Um destes é o efeito de recuperação (cf. Fig. 1), onde ocorre uma reorganização de maneira uniforme dos elétrons ainda disponíveis no eletrólito no momento de relaxação (i.e., período em que a corrente de descarga é reduzida significativamente ou fica nula) (JONGERDEN; HAVERKORT, 2008b; LAHIRI; RAGHUNATHAN; PANIGRAHI, 2002). Este efeito aumenta a capacidade da bateria, e conseqüentemente o seu tempo de vida, visto que uma maior quantidade de carga fica disponível, antes que o dispositivo atinja o nível de *cutoff*.

Outro efeito não linear é o efeito da taxa de capacidade. Este sofre influência do efeito de recuperação, e depende da intensidade da corrente de descarga aplicada e da capacidade atual da bateria. Em altas correntes de descarga a capacidade efetiva da bateria é reduzida, visto que não há tempo suficiente para a reorganização dos elétrons no eletrólito (i.e. efeito de recuperação). Desta forma a capacidade e o tempo de vida da bateria são reduzidos, pois permanece mais carga sem ser utilizada pelo sistema. Em correntes variáveis, a capacidade

efetiva da bateria é elevada, pois há alternância de correntes altas e baixas, ou até mesmo para um período sem corrente e é possível ocorrer o efeito de recuperação, elevando a quantidade

**Figura 1** - Diferentes estados de operação de uma bateria.



Fonte: Sausen (2008).

de carga disponível na superfície do eletrodo. Assim, quanto maior a quantidade de elétrons presentes no eletrólito no momento em que há redução da corrente de descarga, ou esta fica nula, mais carga é possível recuperar e, conseqüentemente, estará disponível na superfície do eletrodo para ser utilizada pelo sistema (JONGERDEN; HAVERKORT, 2008a; SCHNEIDER, 2011).

## 2 Modelos de baterias

A seguir são descritos os principais modelos matemáticos de baterias presentes na literatura técnica que permitem a análise do comportamento de descarga das mesmas.

## **2.1 Modelos Eletroquímicos**

Os modelos eletroquímicos baseiam-se nos processos químicos que ocorrem no interior da bateria durante o processo de descarga descrevendo-os detalhadamente, necessitando de uma grande quantidade de parâmetros da bateria que devem ser informados pelo usuário. Por este motivo os modelos eletroquímicos são considerados muito acurados, mas sua descrição minuciosa torna-os muito complexos e de difícil implementação (JONGERDEN; HAVERKORT, 2008a; LAHIRI; RAGHUNATHAN; PANIGRAHI, 2002).

## **2.2 Modelos Elétricos**

Também conhecidos como modelos de circuitos elétricos, estes modelos descrevem a bateria na forma de circuito utilizando a combinação de componentes elétricos como, fontes, resistores, capacitores e indutores (JONGERDEN; HAVERKORT, 2008a). Dentre as características não lineares, estes modelos são capazes de considerar a taxa de capacidade, mas nem todos os modelos elétricos consideram o efeito de recuperação (CHEN; RINCÓN-MORA, 2006; LAHIRI; RAGHUNATHAN; PANIGRAHI, 2002). Esta categoria de modelos tem como vantagem a simulação de fácil entendimento, apesar de requerer um certo esforço para a configuração. E quando comparados aos modelos eletroquímicos, possuem um custo reduzido, porém são menos acurados (BRONDANI, 2015; CHEN; RINCÓN-MORA, 2006).

## **2.3 Modelos Estocásticos**

Estes modelos descrevem a bateria de forma mais abstrata que os modelos eletroquímicos e elétricos, sendo que a descarga e o efeito de recuperação são descritos como processos estocásticos, ou seja, aleatórios (JONGERDEN; HAVERKORT, 2008a; PANIGRAHI, 2001). Nos modelos estocásticos a bateria é representada por um número finito de unidades de carga e o comportamento de descarga é modelado utilizando um processo transitório estocástico no tempo discreto. Este processo evolui ao longo do tempo, e é dividido em uma sequência de intervalos iguais, sendo que, o estado da bateria é controlado pelo número de unidades de carga restantes. Em cada intervalo de tempo, a corrente média de descarga é medida e usada para determinar o número de unidade de carga consumida. Se esta média for diferente de zero, o número de unidades de carga drenada é obtido através de uma tabela de pesquisa ou de um gráfico que contém dados das taxas de capacidades. No entanto, se em um intervalo não ocorreu descarga, a bateria recupera um certo número de unidades de

carga (i.e., efeito de recuperação). O número exato de unidades de cargas recuperadas é modelado a partir de uma função exponencial decrescente de densidade de probabilidade, que é baseada no estado da carga da bateria e nos coeficientes, que dependem da bateria utilizada, assim como das características de descarga (LAHIRI; RAGHUNATHAN; PANIGRAHI, 2002; OLIVEIRA, 2012).

## **2.4 Modelos Analíticos**

Os modelos analíticos utilizam expressões analíticas para calcular a capacidade real e o tempo de vida da bateria, e como parâmetros os valores que correspondem as características do ambiente operacional e propriedades físicas da bateria. Como as principais propriedades da bateria são modeladas utilizando um conjunto reduzido de equações e possuem uma menor quantidade de parâmetros para serem estimados, este tipo de modelo torna-se mais fácil de implementar computacionalmente quando comparados aos modelos eletroquímicos e elétricos (JONGERDEN; HAVERKORT, 2008a, 2008b; SCHNEIDER, 2011).

Como exemplos de modelos analíticos têm-se: o Modelo Linear, a Lei de Peukert, a Lei de Peukert Estendida, o Modelo KiBaM e o Modelo RV. Sendo possível alguns destes modelos capturar o efeito de taxa de capacidade e o efeito de recuperação que ocorrem no processo de descarga. Estes são computacionalmente flexíveis e eficientes, exigindo avaliação de expressões analíticas e podem ser facilmente configurados para diferentes tipos de baterias (JONGERDEN; HAVERKORT, 2008a, 2008b; LAHIRI; RAGHUNATHAN; PANIGRAHI, 2002).

Na Seção 3, os modelos analíticos mencionados serão abordados com maior detalhamento, especialmente no que se refere às equações que os descrevem, pois serão utilizados neste trabalho para a realização de uma análise comparativa sob o mesmo cenário de simulação com experimentos reais, objetivando verificar qual destes modelos é o mais adequado para a predição do tempo de vida de baterias que alimentam dispositivos móveis.

## **2.5 Modelos via Teoria de Identificação de Sistemas**

A modelagem via Identificação de Sistemas é uma técnica alternativa utilizada para construir modelos matemáticos de sistemas dinâmicos. A partir destes modelos busca-se representar determinadas características relacionadas à causa (i.e., entrada) e ao efeito (i.e., saída) de um conjunto de dados, sem necessidade de envolver as leis físicas presentes no

processo, apenas utiliza-se dados observados do sistema, e algum conhecimento prévio desejado (AGUIRRE, 2007).

Há duas maneiras para a construção de modelos matemáticos na Identificação de Sistemas. A primeira é a modelagem caixa-preta ou modelagem empírica, onde não é necessário um conhecimento prévio do sistema a ser modelado, sendo conhecidos e utilizados apenas os dados de entrada e saída do processo durante a identificação, obtidos a partir de uma plataforma de testes, ou de um processo real, nota-se que não existe nenhuma relação entre a estrutura matemática utilizada com a física do processo. E a modelagem caixa-cinza, onde além dos dados de entrada e saída, existe um conhecimento prévio do sistema a ser modelado, o tipo de informação auxiliar e a forma com que se utiliza esta informação depende do modelo que se está trabalhando (AGUIRRE, 2007; ROMIO, 2012).

## **2.6 Modelos Híbridos**

Os modelos híbridos são uma nova categoria de modelos matemáticos para a predição do tempo de vida de baterias, os quais têm como vantagem a possibilidade de unir dois ou mais tipos de modelos existentes, buscando diminuir as desvantagens particulares (KIM, 2012).

## **3 Modelagem matemática**

Nesta seção são descritos os modelos analíticos utilizados na análise comparativa presente neste artigo, considerando o mesmo cenário de simulação, com o intuito de verificar qual modelo é de mais fácil implementação e realiza a predição do tempo de vida de baterias com maior acurácia, tendo as mesmas condições de comparação utilizando baterias de Li-Po e perfis de descargas constantes. Os modelos analíticos são escolhidos pois eles utilizam um conjunto reduzido de equações, possuem menos parâmetros para estimar e simulação computacional de fácil entendimento, a saber: modelo Linear, Lei de Peukert, versão estendida da Lei de Peukert, modelo KiBaM e o modelo RV.

### **3.1 Modelo Linear**

O modelo Linear é considerado pela literatura técnica o mais simples e menos acurado para a predição do tempo de vida de baterias entre os modelos analíticos. Este modelo é de fácil implementação e não considera os efeitos não lineares que ocorrem na bateria durante a



descarga, visto que a bateria é tratada como um recipiente linear de corrente (JONGERDEN; HAVERKORT, 2008a). A capacidade restante  $C$  de uma bateria, para o modelo Linear é dada pela equação

$$C = C_i - It_d \quad (1)$$

onde:  $C_i$  é a capacidade inicial,  $I$  é a corrente constante de descarga durante a operação, e  $t_d$  é o tempo de duração da corrente. Assim, a capacidade remanescente é calculada sempre que a corrente de descarga for alterada.

### 3.2 Lei de Peukert

Este modelo se diferencia do modelo Linear pois captura uma das características não lineares. Ele considera apenas o efeito da taxa de capacidade, não considerando o efeito de recuperação que influencia diretamente no tempo de vida da bateria (RAKHMATOV; VRUDHULA, 2001). Conforme a Lei de Peukert, o tempo de vida  $L$  de uma bateria para descargas constantes é dado pela expressão

$$L = \frac{a}{I^b} \quad (2)$$

onde:  $I$  é a corrente de descarga, e  $a$  e  $b$  são parâmetros que precisam ser estimados a partir de dados experimentais.

### 3.3 Extensão à Lei de Peukert

Visando diminuir o erro médio apresentado pela Lei de Peukert, Freitas (2015) utilizou a minimização funcional por comparação das derivadas de 1ª e 2ª ordem da equação (2), da qual  $I$  foi evidenciado à esquerda, obtendo

$$I = \left(\frac{a}{L}\right)^{\frac{1}{b}}. \quad (3)$$

desta forma, as derivadas são calculadas em função do tempo  $L$  e, após manipulações matemáticas (FREITAS, 2015), obtém-se o modelo estendido da Lei de Peukert para descargas constantes

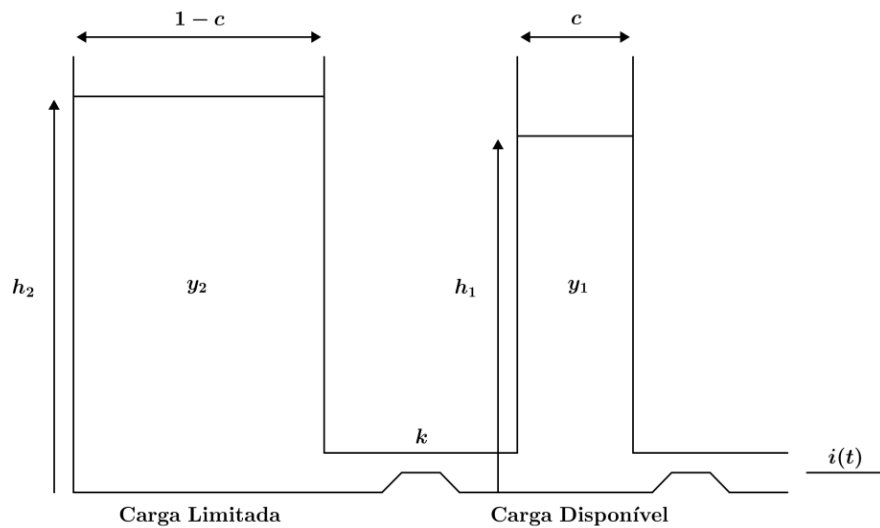
$$L = \left(\frac{I - \sqrt{I^2 - 4C_1 C_2}}{2C_1}\right)^b \quad (4)$$

onde:  $C_1$  é o coeficiente de ajuste não linear,  $C_2$  a capacidade da bateria e  $b$  o coeficiente de Peukert, sendo os parâmetros que precisam ser determinados a partir de um conjunto de dados experimentais, e  $I$  é o valor da corrente de descarga.

### 3.4 Modelo KiBaM

O modelo KiBaM (JONGERDEN; HAVERKORT, 2008b; MANWELL; MCGOWAN, 1993), captura os dois efeitos não lineares apresentados na Seção 1, sendo de fácil implementação computacional. Este modelo foi inicialmente desenvolvido para modelar baterias de Pb-Ácido e utiliza um processo cinético químico que ocorre no interior da bateria em seu fundamento, ou seja, estuda a velocidade das reações químicas dos processos e os fatores que as influenciam. No modelo KiBaM, a carga da bateria é distribuída em duas fontes: a fonte de carga disponível e a fonte de carga limitada, conforme pode ser observado na Fig. 2.

**Figura 2** - Representação do Modelo KiBaM.



Fonte: Manwell; McGowan (1993).

A altura das duas fontes de cargas é dada por

$$h_1 = \frac{y_1}{c} \quad (5)$$

e

$$h_2 = \frac{y_2}{1-c} \quad (6)$$

onde:  $h_1$  e  $h_2$  são, respectivamente, a altura da fonte de carga disponível e limitada,  $y_1$  é quantidade de carga disponível,  $y_2$  a quantidade de carga limitada, e  $c$  é uma fração da capacidade total. Como a fonte de carga disponível concede elétrons para a corrente, e a carga de fonte limitada fornece elétrons somente para a fonte de carga disponível, a diferença de altura entre as duas fontes aumenta quando é aplicada uma corrente de descarga.

A variação de cargas em ambas as fontes é dada pelo sistema de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's)

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -i(t) + k(h_2 - h_1) \\ \frac{dy_2}{dt} = -k(h_2 - h_1) \end{cases} \quad (7)$$

onde:  $k$  é a razão do fluxo de carga entre as duas fontes e  $i(t)$  é a corrente de descarga. Este sistema possui condições iniciais dadas por

$$y_1(0) = cC \quad (8)$$

e

$$y_2(0) = (1 - c)C, \quad (9)$$

onde:  $y_1(0)$  e  $y_2(0)$  são, respectivamente, a quantidade de carga disponível e limitada em  $t = 0$  e,  $C$  é a capacidade total da bateria. Por simplificação algébrica, é adotado um parâmetro  $k'$  dado por

$$k' = \frac{k}{c(1-c)}. \quad (10)$$

O sistema de EDO's pode ser resolvido através da transformada de Laplace, obtendo após manipulações matemáticas

$$y_1(t) = y_1(0)e^{-k't} + \frac{(y_0 k' c - I)(1 - e^{-k't})}{k'} - \frac{Ic(k't - 1 + e^{-k't})}{k'} \quad (11)$$

e

$$y_2(t) = y_2(0)e^{-k't} + y_0(1 - c)(1 - e^{-k't}) - \frac{I(1-c)[k't - 1 + e^{-k't}]}{k'} \quad (12)$$

sendo que a bateria é considerada descarregada quando não há mais carga na fonte de carga disponível ( $y_1 = 0$ ).

### 3.5 Modelo de Rakhmatov e Vrudhula

Por ser capaz de capturar o efeito da taxa de capacidade e o efeito de recuperação, o modelo RV é considerado de alta acurácia pela literatura técnica (RAKHMATOV; VRUDHULA, 2001). Baseado na difusão dos íons no eletrólito, o modelo descreve a evolução unidimensional da concentração das espécies eletroativas no eletrólito através de duas Equações Diferenciais Parciais, dadas por

$$\begin{cases} -J(x, t) = D \frac{\partial C(x, t)}{\partial x} \\ \frac{\partial C(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C(x, t)}{\partial x^2} \end{cases} \quad (13)$$

onde:  $J(x, t)$  é o fluxo das espécies eletroativas em função do tempo  $t$  e de uma distância  $x$  do eletrodo,  $D$  é a constante de difusão, e  $C(x, t)$  é a concentração de espécies eletroativas no tempo  $t$ .

Neste modelo, os processos químicos que ocorrem em ambos os eletrodos são considerados idênticos, desta forma em uma bateria completamente carregada, a concentração de espécies é constante através do comprimento do eletrólito, então tem-se a seguinte condição inicial

$$C(x, 0) = C^*, \quad (14)$$

onde:  $C^*$  é a concentração inicial de espécies eletroativas. E como condições de fronteira, conforme a Lei de Faraday (ERICKSON; MAKSIMOVIC, 2004), tem-se

$$\left. \frac{\partial C(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{i(t)}{vFAD} \quad (15)$$

e

$$\left. \frac{\partial C(x, t)}{\partial x} \right|_{x=w} = 0, \quad (16)$$

onde:  $A$  é a área da superfície do eletrodo,  $F$  é a constante de Faraday e  $v$  é o número de elétrons envolvidos na reação química na superfície do eletrodo.

Após manipulações matemáticas (FREITAS, 2015; SCHNEIDER, 2011), a equação final do tempo de vida de baterias deste modelo para descargas constantes, ou seja  $i(t) = I$ , é dada por

$$\alpha = 2I\sqrt{L} \left[ 1 + 2 \sum_{m=1}^{10} \left( e^{\frac{-\beta^2 m^2}{L}} - \frac{\pi e^{\frac{-\beta^2 m^2}{L}}}{\pi - 1 + \sqrt{1 + \frac{L}{\beta^2 m^2}}} \right) \right] \quad (17)$$

onde:  $\alpha$  e  $\beta$  são estimados através de dados experimentais. Sendo que  $\alpha$  é o parâmetro que está relacionado com a capacidade da bateria e  $\beta$  ao comportamento não linear.

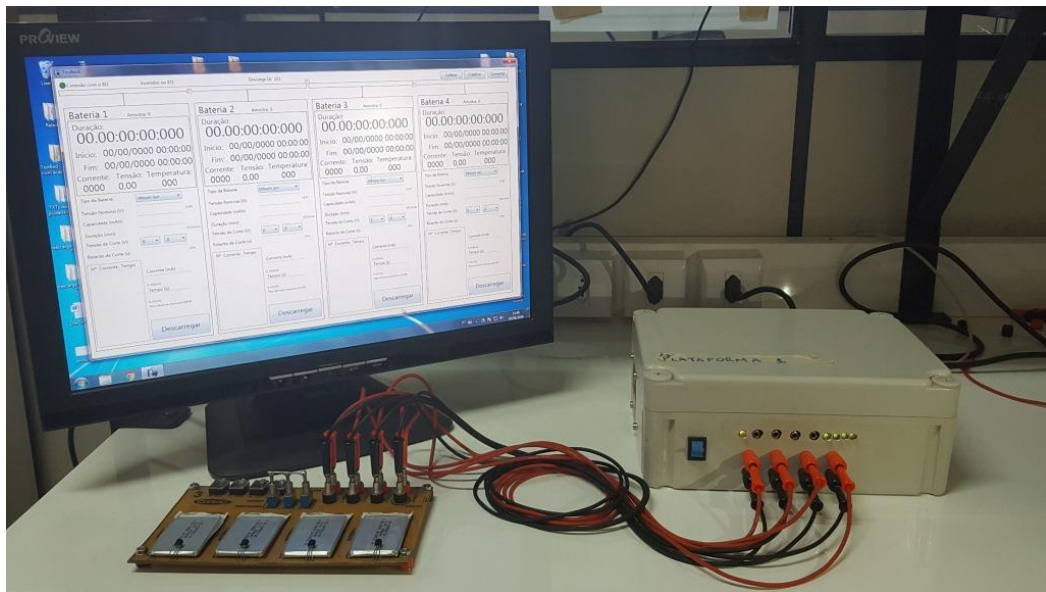
#### 4 Aquisição de dados e estimação dos parâmetros

A coleta dos dados experimentais, proveniente do descarregamento de oito baterias novas do tipo Li-Po, modelo PL-383562-2C, é realizada através de uma plataforma de testes (cf. Fig. 3), disponível no GAIC, que permite capturar as curvas e características de um

processo real de descarga de uma bateria (NONEMACHER, 2010). Esta plataforma permite realizar até quatro descargas concomitantemente, armazenando as informações de cada uma em arquivos separados, facilitando a consulta dos dados.

Os perfis das correntes de descargas constantes utilizados, variam entre 50 mA e 800 mA, com intervalo de 25 mA entre um e outro. Desta forma, utiliza-se 31 perfis de descarga, que são divididos em dois conjuntos, que possuem correntes baixas, médias e altas, o primeiro (cf. Tab. 1) é utilizado para a estimação dos parâmetros do modelo, e o segundo conjunto (cf. Tab. 2), utilizado para a validação dos modelos.

**Figura 3** - Plataforma de testes.



Fonte: dos próprios autores (2016).

Nas tabelas a seguir, os perfis de descarga estão em mA,  $TV_{e_j}$ , é o tempo de vida experimental, em minutos,  $1 \leq j \leq 8$  é o número de experimentos realizados, e  $TV_{em}$ , o tempo de vida experimental médio em minutos para cada perfil de descarga.

**Tabela 1** - Dados utilizados para estimação dos parâmetros dos modelos.

Descarga	$TV_{e1}$	$TV_{e2}$	$TV_{e3}$	$TV_{e4}$	$TV_{e5}$	$TV_{e6}$	$TV_{e7}$	$TV_{e8}$	$TV_{em}$
50	964,07	980,42	860,43	922,15	920,43	993,96	931,38	950,08	940,37
100	464,71	474,42	460,45	466,30	470,75	459,03	445,53	486,62	465,98
150	283,02	311,72	302,97	307,58	345,03	297,62	279,48	305,38	304,10
200	232,20	219,18	213,95	236,18	218,83	235,70	239,72	228,12	227,99
250	191,23	173,47	167,72	188,93	182,78	190,15	193,12	184,65	184,01
300	156,15	148,23	142,28	156,65	157,58	140,68	138,83	155,37	149,47
350	126,53	137,71	139,57	131,23	133,43	123,65	118,67	132,97	130,47
400	115,55	117,75	121,52	115,78	118,80	107,90	101,90	117,50	114,59
450	102,45	105,05	109,60	103,15	106,82	89,80	87,28	103,15	100,91
500	91,98	93,93	97,11	92,68	96,70	83,13	78,65	90,45	90,58
550	83,77	85,06	88,77	82,48	87,46	72,67	68,90	84,42	81,69
600	77,10	77,98	81,31	76,15	80,57	65,50	62,68	76,25	74,69

650	71,05	71,67	74,67	70,03	74,13	59,42	55,90	70,38	68,41
700	65,90	66,37	69,48	64,73	69,76	54,73	51,85	65,28	63,51
750	64,12	50,20	47,06	60,87	61,32	61,72	64,42	59,72	58,68
800	60,10	46,32	42,50	56,92	57,30	57,78	60,07	56,13	54,64

Fonte: Elaborada pelos autores.

**Tabela 2** - Dados utilizados para validação dos modelos.

Descarga	$TV_{e1}$	$TV_{e2}$	$TV_{e3}$	$TV_{e4}$	$TV_{e5}$	$TV_{e6}$	$TV_{e7}$	$TV_{e8}$	$TV_{em}$
75	593,06	607,28	626,98	599,75	586,90	652,15	582,58	606,78	606,94
125	388,48	392,93	375,03	367,40	380,90	393,65	381,55	398,17	384,76
175	280,85	274,50	271,33	285,07	297,07	253,50	246,43	269,10	272,23
225	206,45	191,38	188,35	207,45	199,83	211,80	214,07	208,58	203,49
275	170,48	159,63	145,22	168,08	165,87	171,35	175,63	165,10	165,17
325	141,57	145,68	149,53	143,47	148,45	129,85	126,40	145,33	141,29
375	118,63	128,93	130,68	123,57	127,72	111,52	118,87	124,96	123,11
425	111,00	113,72	94,47	110,13	105,30	109,03	114,40	109,01	108,38
475	97,28	98,67	91,68	97,54	101,72	86,11	82,90	98,18	94,26
525	88,57	91,30	93,15	85,28	92,63	78,67	74,11	85,85	86,20
575	80,42	83,11	82,88	80,00	83,13	68,13	65,85	79,23	77,84
625	73,60	74,38	77,58	72,40	77,30	62,42	59,83	73,12	71,33
675	68,35	69,00	71,68	67,78	71,63	57,18	53,42	68,73	65,97
725	63,53	63,77	66,68	62,27	66,42	51,62	48,27	62,98	60,69
775	62,35	47,96	44,04	58,87	59,73	59,80	62,08	58,23	56,63

Fonte: Elaborada pelos autores.

A estimação dos parâmetros, para os cinco modelos, é realizada através do método dos Mínimos Quadrados (MQ), que é um método de otimização matemática que procura encontrar o valor ótimo dos parâmetros para um determinado conjunto de dados, através da minimização da soma dos quadrados das diferenças entre o valor estimado e os dados experimentais (i.e., resíduos) (RAKHMATOV; VRUDHULA, 2001). O método dos MQs está implementado na ferramenta computacional *MatLab*, através da função de otimização "lsqnonlin".

Destaca-se ainda que os modelos analíticos analisados nesta pesquisa, possuem o mesmo cenário de simulação. Ou seja, para a simulação, é utilizado o mesmo conjunto de dados experimentais obtidos nos processos de descarga de baterias de Li-Po, a metodologia adotada para a estimação dos parâmetros é a mesma, assim como, a estrutura dos algoritmos no *MatLab* segue o mesmo padrão.

O modelo Linear possui apenas um parâmetro que necessita ser estimado, sendo obtido  $C_i=46626$ . Para a Lei de Peukert, o ideal é que o valor de  $a$  seja igual à capacidade da bateria, e  $b$  igual a 1. Porém, na prática, normalmente  $a$  possui um valor próximo ao da capacidade da bateria, e  $b$  um valor maior que 1. Desta forma os parâmetros encontrados

foram  $a=50763$  e  $b=1,0195$ . Já para os três parâmetros do modelo Lei de Peukert Estendida, foram obtidos  $C_1=-0,0077$ ,  $C_2=37138$  e  $b=1,0445$ . O modelo KiBaM também possui três parâmetros para estimar, sendo  $k=10,1938$ ,  $c=0,028$  e  $q_{max}=46716$ . Por fim, para o modelo RV foram obtidos os respectivos valores para os parâmetros,  $\alpha=24392$  e  $\beta=3,4466$ .

## 5 Resultados e análise das simulações

A partir dos parâmetros obtidos os modelos analíticos são implementados e simulados na ferramenta computacional *MatLab* a fim de realizar a sua validação. Os resultados encontrados nas simulações são comparados com um conjunto de dados experimentais obtidos da plataforma de testes, conforme apresentado na Tab. 3, além de ser realizada uma análise comparativa entre os modelos estudados, com o objetivo de verificar qual é o modelo analítico mais acurado para prever o tempo de vida de uma bateria para descargas constantes.

Observa-se que para este cenário de simulação todos os modelos descrevem de forma satisfatória os dados experimentais, visto que apresentam um erro médio menor que 5% - valor adotado pela literatura como referência de boa precisão. O modelo Linear obteve o maior erro médio de 3,23%, sendo o menos acurado desta comparação. Enquanto os demais modelos apresentaram erro médio menor que 1,45%, sendo o modelo mais acurado a Lei de Peukert Estendida, com um erro médio de 1,08%. A diferença de acurácia dada pelo modelo Linear e os demais, se deve ao fato deste não considerar nenhum efeito não linear que ocorre na bateria durante o processo de descarga. Ressalta-se também que os modelos KiBaM e RV apresentaram um erro médio semelhante entre si, ficando atrás apenas do modelo da Lei de Peukert Estendida. Em relação ao tempo de vida da bateria, nota-se que a medida que a corrente de descarga aplicada aumenta o tempo de vida diminui, pois não há tempo suficiente para a reorganização dos elétrons no eletrólito.

**Tabela 3** - Análise comparativa entre os modelos analíticos.

Dados Experimentais		Linear		Lei de Peukert		Peukert Estendida		KiBaM		RV	
I (mA)	L (min)	L (min)	Erro (%)	L (min)	Erro (%)	L (min)	Erro (%)	L (min)	Erro (%)	L (min)	Erro (%)
75	606,94	621,70	2,43	622,10	2,50	621,10	2,33	619,40	2,05	629,40	3,70
125	384,76	373,00	3,06	369,60	3,94	375,70	2,36	370,30	3,76	372,70	3,14
175	272,23	266,40	2,14	262,20	3,68	266,80	2,00	263,50	3,21	264,80	2,73
225	203,49	207,20	1,82	203,00	0,24	205,90	1,18	204,20	0,35	205,00	0,74
275	165,17	169,50	2,62	165,40	0,14	167,30	1,29	166,50	0,81	167,00	1,11
325	141,29	143,50	1,57	139,50	1,26	140,70	0,41	140,30	0,70	140,70	0,41
375	123,11	124,30	0,97	120,60	2,04	121,20	1,55	121,10	1,63	121,40	1,39

425	108,38	109,70	1,22	106,10	2,11	106,40	1,83	106,50	1,74	106,70	1,55
475	94,26	98,10	4,07	94,70	0,47	94,80	0,57	94,90	0,68	95,10	0,89
525	86,20	88,80	3,02	85,50	0,81	85,40	0,92	85,60	0,69	85,60	0,69
575	77,84	81,10	4,18	78,00	0,20	77,70	0,18	77,80	0,06	77,80	0,06
625	71,33	74,60	4,59	71,60	0,38	71,20	0,18	71,30	0,04	71,30	0,04
675	65,97	69,10	4,74	66,20	0,35	65,70	0,41	65,80	0,26	65,70	0,41
725	60,69	64,30	5,94	61,60	1,50	61,00	0,51	61,00	0,51	60,90	0,34
775	56,63	60,10	6,12	57,50	1,53	56,90	0,47	56,90	0,47	56,70	0,12
<b>Erro Médio (%)</b>			<b>3,23</b>	<b>1,41</b>	<b>1,08</b>	<b>1,13</b>	<b>1,13</b>	<b>1,13</b>	<b>1,13</b>	<b>1,15</b>	<b>1,15</b>

Fonte: Elaborada pelos autores.

## 6 Conclusão

A partir das simulações realizadas nesta pesquisa, ressalta-se que para todos os modelos é utilizado os mesmos dados experimentais obtidos no descarregamento de baterias de Li-Po através da plataforma de testes, os parâmetros dos modelos obtidos pelo método dos MQs, e a implementação no programa computacional *MatLab* segue o mesmo padrão (i.e., mesmo cenário de simulação). Verifica-se que os modelos analíticos; Linear, Lei de Peukert, Lei de Peukert Estendida, KiBam e RV são considerados acurados para a predição do tempo de vida de baterias para perfis de descargas constantes. Destaca-se que neste trabalho, o modelo que descreve com maior confiabilidade os dados experimentais é o modelo Lei de Peukert Estendida, que apresentou um erro médio de 1,08%, sendo que teve um rendimento 66% superior em relação ao caso extremo (i.e. modelo Linear com erro médio de 3,23%). Como trabalhos futuros pretende-se determinar um novo conjunto de dados para a estimação dos parâmetros e a validação dos modelos. Além disto, estender esta comparação para perfis de correntes de descargas variáveis considerando as funções desempenhadas por um smartphone sob o mesmo cenário de simulação, com o objetivo de aproximar a simulação do processo real de descarga e verificar a acurácia e o comportamento dos modelos analíticos.

## Referências

AGUIRRE, L. A. **Introdução à Identificação de Sistemas: técnicas lineares e não lineares aplicadas a sistemas reais**. 3. ed. Belo Horizonte: UFMG, 2007. 730 p.

BRONDANI, M. F. **Modelagem matemática do tempo de vida de baterias de lítio íon polímero utilizando algoritmos genéticos**. 2015. 102 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) - Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí-RS. 2015.

CHEN, M.; RINCÓN-MORA, G. **Accurate electrical battery model capable of predicting runtime and i-v performance**. IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 21, No. 2, pp. 504–511. 2006.



ERICKSON, R. W.; MAKSIMOVIC, D. **Fundamentals of power electronics**. 3. ed. Kluwer Academic, New York: Springer, 2004.

FREITAS, D. J. B. **Estudo e Aplicação de Modelos Analíticos na Predição do Tempo de Vida de Baterias Utilizadas em Dispositivos Móveis**: Proposição de Extensões aos Modelos Tradicionais. 2015. 88 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) - Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí-RS. 2015

IGLESIAS, R. et al. **Modelado y simulación de una batería de ion-litio comercial multicelda**. In: Seminário anual de automática, electrónica industrial e instrumentación, 19, 2012. Guimarães – Portugal.

JONGERDEN, M. R.; HAVERKORT, B. **Battery modeling**. Technical report, Faculty Electrical Engineering. 2008a.

JONGERDEN, M.R.; HAVERKORT, B. **Which battery model to use?** Technical report, Imperial College London. 2008b.

KIM, T. **A hybrid battery model capable of capturing dynamic circuit characteristics and nonlinear capacity effects**. 2012. 62 f. Master's thesis (Electrical & Computer Engineering) - University of Nebraska, Lincoln-NE. 2012.

LAHIRI, S. D. K.; RAGHUNATHAN, A.; PANIGRAHI, D. **Battery-driven system design: a new frontier in low power design**. In: Proceedings of the 2002 Asia and South Pacific Design Automation Conference. IEEE Computer Society, pp. 261–267. 2002.

MANWELL, J.; MCGOWAN, J. **Lead acid battery storage model for hybrid energy systems**. Solar Energy, Vol. 50, pp. 399–405. 1993.

NONEMACHER, H. B. et al. **Desenvolvimento de um testbed para avaliação de modelos matemáticos utilizados na predição do tempo de vida de baterias**. In: Congresso Regional de Iniciação Científica e Tecnológica em Engenharia. XXIV CRICTE. Rio Grande-RS. 2010.

OLIVEIRA, A. V. **Análise comparativa de metodologias de estimação de parâmetros aplicada a modelos analíticos utilizados na predição do tempo de vida de uma bateria**. 2012. 77 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) - Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí-RS. 2012

PANIGRAHI, D. et al. **Battery life estimation of mobile embedded systems**. In Fourteenth International Conference on VLSI Design. Bangalore. 2001.

RAKHMATOV, D.; VRUDHULA, S. **An analytical high-level battery model for use in energy management of portable electronic systems**. In Proceedings of the International Conference on Computer Aided Design (ICCAD'01). IEEE Press, Piscataway, pp. 488–493. 2001.

ROMIO, L.C. et al. **Aplicação de identificação de sistemas no tempo de vida de baterias de dispositivos móveis**. VETOR - Revista de Ciência Exatas e Engenharias, Vol. 22. 2012

SAUSEN, P. S. **Gerenciamento integrado de energia e controle de topologia em redes de sensores sem fio**. 2008. 111 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) - Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande-PB. 2008.

SCHNEIDER, K. K. **Modelos matemáticos na predição do tempo de vida de baterias utilizadas em dispositivos móveis**. 2011. 62 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) - Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí-RS. 2011.