

# IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO EM 3D PARA PROBLEMAS DE VISCOELASTICIDADE

Adrián Alberto Betancur<sup>1</sup>; Carla Tatiana Mota Anflor Anflor<sup>2</sup>

## Resumo

O estudo de materiais com comportamento viscoelásticos e viscoplástico tem sido muito importante na engenharia dos materiais, devido à sua ampla aplicabilidade ligado também à possibilidade de emprego de materiais biodegradáveis. Este trabalho é apresentado uma modelagem tridimensional a partir do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para a análise de materiais viscoelásticos. O método foi implementado com elementos constantes tridimensionais e o estudo foi realizado em um volume representativo obtido de outros trabalhos de investigação reportados na literatura. Os resultados foram avaliados e comparados com as soluções analíticas e estudos realizados na literatura. Os resultados mostraram concordância satisfatória na predição do comportamento viscoelástico empregando o modelo constitutivo de Kelvin-Voigt.

**Palavras chaves:** Método dos Elementos de Contorno (MEC), Viscoelasticidade, Modelo tridimensional.

## Abstract

The study materials with viscoelastic and viscoplastic behavior has been very important engineering materials due to its wide applicability also linked to the possibility of use of biodegradable materials. This paper presents a three-dimensional modeling from the Boundary Element Method (BEM) for the analysis of viscoelastic materials. The method was implemented with three-dimensional elements contained and the study was conducted on a representative volume obtained from other research reported in the literature. The results were evaluated and compared with the analytical solutions and studies in the literature. The results showed good agreement in predicting the viscoelastic behavior using the constitutive model of Kelvin-Voigt.

**Keywords:** Boundary Element Method (BEM), Viscoelastic, tridimensional Model.

## Introdução

A estimativa do comportamento efetivo de materiais compósitos viscoelásticos tem sido de considerável interesse devido ao intenso uso em muitos componentes da engenharia (DARIDON et al. 2016). Os materiais com comportamento viscoelásticos são materiais que contém tanto um comportamento viscoso, devido à presença de estruturas poliméricas e um comportamento elástico devido à presença de ligações que em sua maioria são metálicas. O comportamento dos dois fenômenos (elástico e viscoso) se efetua por separado quando o material é solicitado. O comportamento elástico é caracterizado pela movimentação leve dos átomos a partir de sua posição de equilíbrio e ao longo dos planos cristalográficos, enquanto o

---

<sup>1</sup> Doutorando em Ciências Mecânicas pela Universidade de Brasília (UnB), pesquisador no Grupo de Mecânica Experimental e Computacional (GMEC) da UnB; E-mail: aabetanc@gmail.com.

<sup>2</sup> Pós-Doutora, professora adjunta da Universidade de Brasília (UnB). Pesquisadora no Grupo de Mecânica Experimental e Computacional (GMEC) da UnB; E-mail: anflor@unb.br.

comportamento viscoso é produzido a partir da difusão dos átomos e das moléculas ao interior do material (ASKELAND, 1998). Para a representação deste comportamento e da avaliação das propriedades efetivas existem certos métodos que levam em consideração a história do processo durante as solicitações e podem expressar, por conseguinte, relações constitutivas na forma diferencial ou na forma integral (Creus, 1989). Alguns modelos constitutivos foram desenvolvidos nos últimos anos (AMIN, ALAM AND OKUI 2002; BARDENHAGEN, STOUT AND GRAY 1997; A. LION, 1996; A. LION, 1997; REESE AND GOVINDJEE, 1998) onde também foram pesquisadas as propriedades mecânicas dependentes da temperatura em elastômeros. Khan and H. Zhang, (2001) desenvolveram um modelo para estudar a resposta de um polímero em estado de carga quase estático e também estado de carga dinâmico. Com este modelo desenvolvido foi possível determinar tanto as curvas de fluência e de relaxação como a razão de envelhecimento. Hasanpour and Ziaei-Rad, (2008) apresentaram um modelo fenomenológico tridimensional viscoelásticoplástico para polímeros. Este modelo foi baseado na suposição de que os esforços podem ser descompostos em duas partes: uma parte viscoelástica e uma parte elásticoplástica. A comparação entre os dados numéricos e experimentais mostraram que o modelo proposto podia representar satisfatoriamente o comportamento dos polímeros. Mesquita. A and Coda. H, (2000) desenvolveram um modelo viscoelástico em 2D fundamentados nos modelos constitutivos de Kelvin e Boltzmann considerando o MEC e na sequência implementaram o mesmo para método dos elementos finitos (MEF) (MESQUITA; CODA, 2002). Nesta formulação os autores consideraram uma aproximação ao fenômeno viscoelástico a partir de uma equação com diferenciais de tempo, onde tal modelo implementado mostrou-se preciso e de grande estabilidade.

No presente trabalho é apresentado um modelo em 3D para estudar o comportamento viscoelástico de um material homogêneo. O modelo de viscoelasticidade está baseado no modelo constitutivo de Kelvin-Voigt. O modelo foi implementado mediante o método dos elementos de contorno (MEC) onde o domínio de análises é dividido por elementos constantes lineares. Ao final, os dados foram validados com dados experimentais e com a solução analítica.

## **1 Marco Teórico**

O comportamento viscoelástico obedece a certas regras conhecidas como regras hereditárias, que, hoje em dia, são conhecidas como leis de viscoelasticidade. Em um

processo de solicitação os deslocamentos e as tensões que acontecem em um material viscoelástico são variáveis que dependem do tempo; então, as componentes cartesianas das tensões  $\sigma$  e as deformações  $\varepsilon$  são funções definidas num intervalo temporal  $(t_1 \leq t \leq t_2)$  (Gurtin and Sternberg, 1961). A relação constitutiva é apresentada mediante a Eq. 1.

$$\sigma(t) = C(\varepsilon(t)) \quad (1)$$

Onde  $C$  segundo Gurtin and Sternberg, (1961) é uma transformação que associa cada histórico de deformações a um histórico de tensões. Essa lei hereditária está sujeita a uma série de restrições que devem ser cumpridas durante a modelagem para uma completa descrição de um comportamento viscoso. Para se conhecer as restrições e as formulações de viscoelásticas mais detalhadas remetimos aos leitores aos trabalhos Gurtin and Sternberg (1961) e Schapery, (1997).

## 1.2 Representação Integral

Gurtin and Sternberg, (1961) sugerem que uma representação matemática que envolve um comportamento viscoelástico deve estar em função do tempo atual  $t$  e de um tempo em que o processo começou a acontecer  $\tau$ . Isto, expressado em termos matemáticos é apresentado na Eq. 2.

$$R_H = R_H(t, \tau) \quad (2)$$

Onde  $R$  é a resposta do material a qualquer solicitação  $H$ . Geralmente, as respostas  $R$  dos problemas, tanto em visco-elasticidade como em visco-plasticidade são dadas por integrais específicas de convolução.

A integral de convolução de Stieltjes é uma das mais fundamentais da mecânica hereditária, a qual permite conhecer as tensões em função das deformações. Este teorema estabelece que para toda lei hereditária linear  $C$  entre dois tensores de segunda ordem  $(\varepsilon, \sigma)$ , corresponde uma única função tensorial de quarta ordem  $G$  definida no intervalo temporal  $(-\infty, \infty)$ , conforme apresentado na Eq. 3.

$$\sigma_{ij} = \varepsilon_{kl} * dG_{ijkl} = \int_{-\infty}^t \varepsilon_{kl}(t-\tau) dG(\tau)_{ijkl} \quad (3)$$

A função  $G$  possui as propriedades de simetria  $G_{ijkl} = G_{jikl} = G_{ijlk}$ . A demonstração desse teorema está presente em Gurtin e Sternberg, (1961). O operador integral de convolução

deve cumprir as propriedades de comutatividade, associatividade e distribuição. Isto permite a definição das relações constitutivas para encontrar as tensões e os deslocamentos num problema de comportamento viscoelástico. Para o caso das tensões tem-se a Eq. 4.

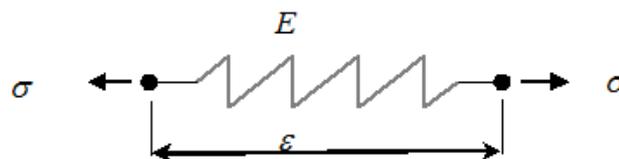
$$\sigma_{ij} = \int_{-\infty}^t G_{ijkl}(t-\tau) d\varepsilon(\tau)_{kl} \quad (4)$$

E para o caso das deformações tem-se a Eq.5.

$$\varepsilon_{ij} = \int_{-\infty}^t D_{ijkl}(t-\tau) d\sigma(\tau)_{kl} \quad (5)$$

As propriedades constitutivas do material são representadas pelas funções  $G(t)$  e  $D(t)$  que, quando utilizadas nas Eq. 4 e Eq. 5, fornecem a tensão (ou deformação) para um dado histórico de deformação (ou tensão). A Eq. (4) é conhecida como lei integral de fluência e a Eq. (5) é conhecida como função de relaxação. Os módulos de relaxação ou de fluência podem ser determinados a partir do monitoramento de testes experimentais de relaxação ou de fluência (também conhecido como Creep estático) respectivamente. Para determinar função de relaxação pode-se aplicar um histórico de deformações constantes no tempo enquanto se monitora o comportamento das tensões de resposta. Para o caso da função de fluência, são aplicados históricos constantes de tensão e monitora-se a evolução das deformações. Existe outra forma de estabelecer a lei constitutiva viscoelástica, além da tradicional forma integral e diferencial, que é utilizando modelos analógicos mecânicos. A teoria dos modelos analógicos mecânicos é análoga à teoria dos circuitos elétricos (TSCHOEGL, 1989). Nesses modelos, os fenômenos físicos envolvidos são representados por elementos gráficos que podem ser conectados entre si, de forma a reproduzir determinado comportamento. De modo geral, esse procedimento facilita o processo de análise do sistema mecânico. A Figura 1 ilustra um elemento de mola unidimensional o qual apresenta ao mesmo tempo um material com comportamento elástico linear. Este comportamento caracteriza-se pela possibilidade do material recuperar sua condição inicial após a retirada da solicação. Neste modelo  $E$  representa o módulo de Young e  $\varepsilon$  é a deslocamento do material.

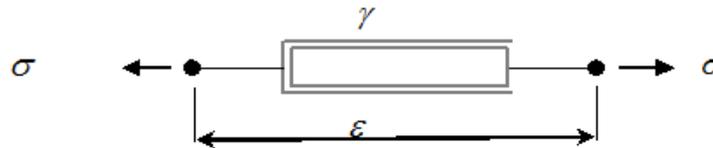
**Figura 1-** Representação do modelo de Hooke.



Fonte: Carbone, (2007).

A Figura 2 representa um elemento de amortecedor unidimensional o qual representa ao mesmo tempo um material com comportamentos puramente viscosos. Esse tipo de material apresenta tensões que são proporcionais à taxa de deformação que o material sofre e não à deformação propriamente dita. Este comportamento é descrito pelo modelo de Newton. Neste caso, o material pode alterar sua configuração apresentando deformações permanentes.

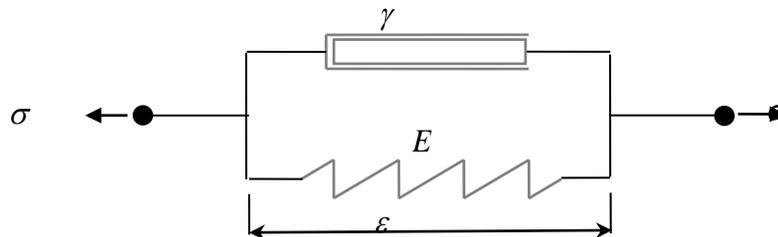
**Figura 2-** Representação do modelo de Newton.



Fonte: Carbone, (2007).

O comportamento viscoelástico (Fig. 3), que possui características intermediárias aos dois modelos descritos, é representado a partir da associação dos dois elementos anteriormente apresentados. Uma possibilidade de associação direta é, por exemplo, dispor os dois elementos em série (Modelos de Maxwell) ou em paralelo (Modelos de Kelvin-Voigt). Neste trabalho será considerado o modelo constitutivo de Kelvin-Voigt.

**Figura 3-** Modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt.



Fonte: Carbone, (2007).

As relações para o caso do comportamento elástico-linear serão dadas pela Eq. 6.

$$\sigma^e = E\varepsilon^e \quad (6)$$

Onde o superíndice  $e$  indica a parte elástica. Para o caso viscoso, define-se o comportamento do material como um fluido Newtoniano, e a relação constitutiva vêm sendo apresentada pela Eq. 7.

$$\sigma^v = \gamma \dot{\varepsilon}^v \quad (7)$$

Onde o superíndice  $v$  indica a parte viscosa.

Equilíbrio estará dado pela Eq. 8.

$$\sigma = \sigma^e + \sigma^v \quad (8)$$

A equação de compatibilidade é representada pela Eq. 9.

$$\varepsilon(t) = \varepsilon^e(t) = \varepsilon^v(t) \quad (9)$$

Logo, as equações constitutivas são as apresentadas na Eq. 10.

$$\begin{aligned} \sigma^e(t) &= E\varepsilon^e(t) \\ \sigma^v(t) &= \gamma\dot{\varepsilon}^v(t) \end{aligned} \quad (10)$$

Substituindo as equações constitutivas e de compatibilidade na equação de equilíbrio (Eq.8), obtém-se a equação diferencial do modelo.

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \gamma\dot{\varepsilon}(t) \quad (11)$$

Para um dado histórico de tensões, a solução da equação diferencial linear de primeira ordem é apresentada na Eq. 12.

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^t \sigma(\tau) e^{-\frac{E}{\gamma}(t-\tau)} d\tau \quad (12)$$

Integrando por partes, encontra-se a função de fluência fornecida pelo modelo apresentado na Eq.13.

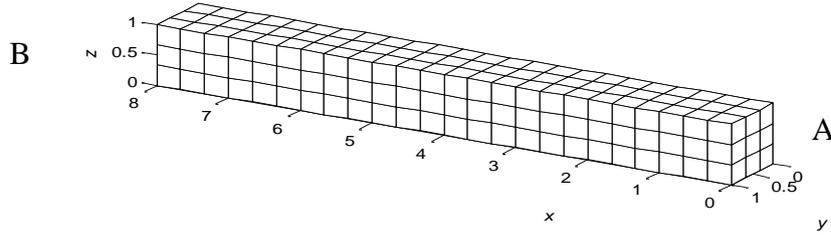
$$D(t-\tau) = \frac{1}{E} \left( 1 - e^{-\frac{E}{\gamma}(t-\tau)} \right) \quad (13)$$

Observa-se que, quando  $t$  tende ao infinito, obtém-se  $\varepsilon(\infty) = \sigma_0/E$ , que corresponde a uma solução elástica assintótica, que ocorre quando toda tensão é suportada pela mola. Para um dado histórico de deformação, é possível obter a tensão atual diretamente por meio da Eq. 11. Um teste de relaxação é fisicamente impossível com o modelo constitutivo de Kelvin-Voigt, pois  $\dot{\varepsilon}(t) = \varepsilon_0\delta(t)$ , o que corresponderia a uma tensão inicial infinitamente alta, logo, não há função de relaxação correspondente para esse modelo.

## 2 Metodologia

As equações fenomenológicas implementadas no MEC foram empregadas para o estudo de um prisma viscoelástico submetido a uma força constante. A geometria foi discretizada em 54 elementos constantes, conforme ilustrado na Fig. 4. As faces “A” e “B” tiveram condições de contorno de engaste e força constante, respectivamente. A carga constante foi aplicada por um período de 45 dias.

**Figura 4** - Discretização da geometria para implementação do modelo de Kelvin-Voigt.



Fonte: Os autores, (2016).

Considerando o modelo mecânico análogo e o método dos resíduos ponderados pertinente a formulação do MEC parte-se da equação de equilíbrio, conforme apresentada na Eq. 14.

$$\int_{\Omega} u_{ki}^* (\sigma_{ij,j} + b_i) d\Omega = 0 \quad (14)$$

Onde  $\Omega$  é o domínio analisado e  $u_{ki}^*$  é a solução fundamental de Kelvin. Logo, impondo as relações viscoelásticas apresentadas na Eq. 11 e aplicando o teorema da divergência chega-se na Eq. 15.

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} d\Omega - \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \gamma C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = 0 \quad (15)$$

Onde  $\Gamma$  é a contorno do corpo analisado. Logo, considerando que,

$$\varepsilon_{kij}^* C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} = \sigma_{klm}^* \varepsilon_{lm} = \sigma_{klm}^* u_{l,m} = \sigma_{kij}^* u_{i,j} \quad (16)$$

$$\varepsilon_{kij}^* \gamma C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} = \gamma \sigma_{klm}^* \dot{\varepsilon}_{lm} = \gamma \sigma_{klm}^* \dot{u}_{l,m} = \gamma \sigma_{kij}^* \dot{u}_{i,j} \quad (17)$$

E substituindo tais considerações na Eq. 15 resulta a Eq. 18.

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* u_{i,j} d\Omega - \gamma \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* \dot{u}_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = 0 \quad (18)$$

Ao integrar por partes o segundo e o terceiro termo da Eq. 18 obtém-se a Eq. 19.

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* n_j u_i d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma_{kij,j}^* u_i d\Omega - \gamma \int_{\Gamma} \sigma_{kij}^* n_j \dot{u}_i d\Gamma + \gamma \int_{\Omega} \sigma_{kij,j}^* \dot{u}_i d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = 0 \quad (19)$$

A Eq. 19 pode ser reescrita ao usar o teorema fundamental do equilíbrio.

$$\sigma_{kij,j}^* = -\delta(p,s) \delta_{ki} \quad (20)$$

Onde  $\delta(p,s)$  é a função Delta de Dirac,  $s$  é o ponto campo e  $p$  o ponto fonte.

Aplicando a Eq. 20 a Eq. 19 e levando em consideração as propriedades do delta de Dirac e o fato de que  $\sigma_{kij}^* n_j = p_{ki}^*$ , obtém-se finalmente a representação da equação integral viscoelástica do modelo constitutivo de Kelvin-Voigt, conforme a Eq. 21.

$$\bar{C}_{ki}u_i(p) + \gamma\bar{C}_{ki}\dot{u}(p) = \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega \quad (21)$$

Onde  $\bar{C}_{ki}$  é o mesmo termo obtido para a formulação elástica. Para o problema algébrico computacional as fronteiras da superfície  $\Gamma$  do domínio analisado foram divididas por subdomínios  $\Gamma_s$  onde as variáveis foram aproximadas, seguindo a Eq. 22.

$$\begin{aligned} p_i &= \phi^\alpha P_i^\alpha \\ u_i &= \phi^\alpha U_i^\alpha \\ \dot{u} &= \phi^\alpha \dot{U}_i^\alpha \end{aligned} \quad (22)$$

Onde  $\phi^\alpha$  e  $\alpha$  são as funções de forma e  $p$  o nó do elemento, respectivamente. Os valores de  $P_i^\alpha$ ,  $U_i^\alpha$  e  $\dot{U}_i^\alpha$  são variáveis nodais. Adotando essas aproximações numa representação integral para deslocamentos e trações, obtém-se a Eq. 23.

$$\bar{C}_{ki}U_i(p) + \gamma\bar{C}_{ki}\dot{U}_i(p) = \sum_{c=1}^{n_s} \int_{\Gamma_s} u_{ki}^* \phi^\alpha d\Gamma_s P_i^\alpha - \sum_{s=1}^{n_s} \int_{\Gamma_s} p_{ki}^* \phi^\alpha d\Gamma_s U_i^\alpha - \gamma \sum_{s=1}^{n_s} \int_{\Gamma_s} p_{ki}^* \phi^\alpha d\Gamma_s \dot{U}_i^\alpha + b_i \sum_{s=1}^{n_s} \int_{\Omega} B_{ki}^* d\Omega \quad (23)$$

A Eq. 23 pode ser apresentada sob a forma matricial representando a discretização do problema.

$$HU(t) + \gamma H\dot{U}(t) = GP(t) + Bb(t) \quad (24)$$

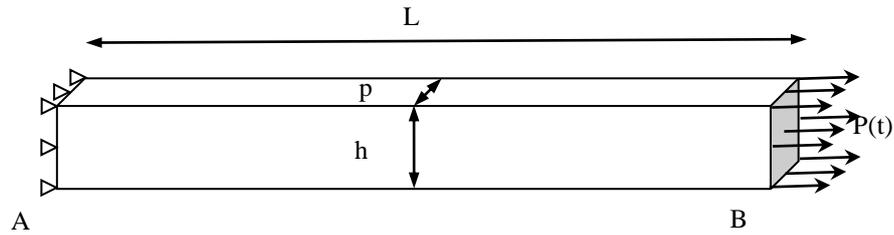
Para a solução da equação matricial das diferenciais temporais (Eq. 24) é necessário aproximar a velocidade no tempo. Este procedimento é realizado adotando-se um comportamento linear ao longo do tempo, conforme apresentado na Eq. 25.

$$\dot{U}_{s+1} = \frac{U_{s+1} - U_s}{\Delta t} \quad (25)$$

### 3 Resultados Numéricos

Para a validação do modelo proposto em 3D foi discretizado um prisma conforme apresentado na figura 5, considerando a ausência de força de corpo. A geometria do prisma está submetida a um carregamento constante em uma de suas extremidades e a um engaste na outra. Os parâmetros de solitação e as propriedades físicas do material são apresentados na tab. 1.

**Figura 5-** Detalhe das dimensões e das condições de contorno.



Fonte: Os autores, (2016).

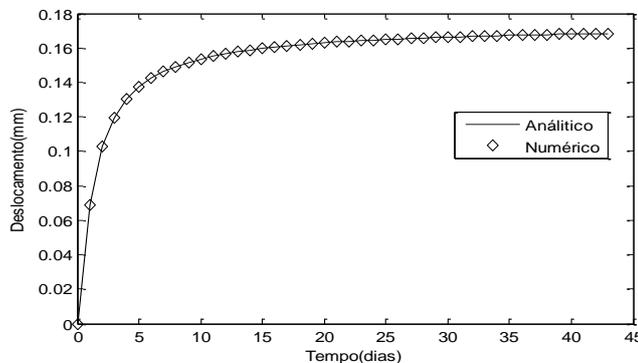
**Tabela 1-** Propriedades físicas do material.

Propriedades físicas	Geometria
$E = 22,5757 \text{ kN/mm}^2$	$L = 800 \text{ mm}$
$\gamma = 4,4545 \text{ dia}$	$h = 100 \text{ mm}$
$\nu = 0$	$p = 100 \text{ mm}$
Parâmetro de análise	Carregamento
$\Delta t = 1 \text{ dia}$	$P(t) = 0,005 \text{ kN/mm}^2$
tempo total = 45 dias	

Fonte: Os autores, (2016).

Os valores dos deslocamentos avaliados na face B são obtidos com a implementação proposta usando MEC e posteriormente comparados com a curva analítica deste problema, conforme ilustrado na Figura 6. É possível verificar que o modelo implementado foi capaz de prever o comportamento viscoelástico do problema analisado pela concordância satisfatória da curva numérica com a analítica obtida a partir da Eq.13. Isto indica que para um passo temporal diário unitário o método implementado prediz o comportamento viscoelástico do material, apresentando coerência com os resultados obtidos por Mesquita e Coda, (2000), (2002).

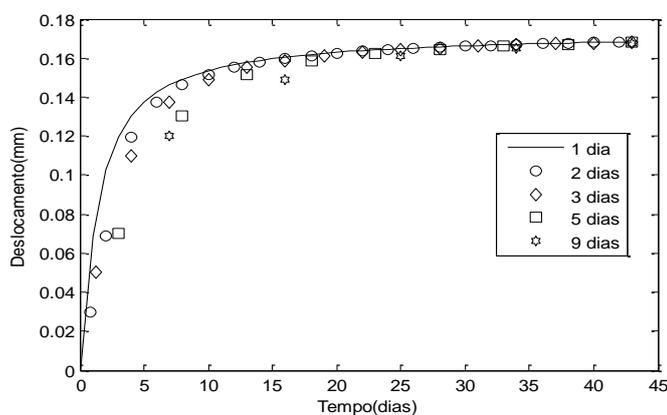
**Figura 6 -** Resposta em termos de deslocamentos na face A do domínio.



Fonte: Os autores, (2016).

No passo seguinte foi avaliado a estabilidade do método implementado. Para estas análises foi utilizada uma variação temporal dos deslocamentos mudando os passos temporais em 1, 2, 3, 5 e 9 dias, durante cada rodada. Os resultados obtidos são apresentados na Fig. 7. Neste caso pode ser observado que nos primeiros dias o método tem uma leve diferença com respeito ao método analítico, mas que vai se estabilizando à medida que os dias vão passando e o comportamento viscoso vai sendo alcançado. De forma geral os resultados apresentaram uma boa estabilidade.

**Figura 7-** Análise da estabilidade do método com a variação dos espaços de tempo.



Fonte: Os autores, (2016).

#### 4 Conclusões

Neste trabalho foi proposto a implementação de um modelo em 3D para a formulação do método dos elementos de Contorno (MEC) aplicado à teoria da viscoelasticidade. O modelo implementado considerou a teoria de Kelvin-Voigt e apresentou uma boa concordância com resultados analíticos e com dados reportados na literatura. A consistência do método aplicado também pôde ser comprovada ao confrontar com diferenças de espaços de tempo entre cada ensaio, mostrando-se assim, a qualidade e consistência do modelo implementado. O modelo implementado está dedicado à solução de materiais homogêneos e a implementação para materiais heterogêneos está em desenvolvimento.

#### 5 Agradecimentos

Os pesquisadores agradecem ao CAPES pelo financiamento ao projeto de pesquisa e, ao grupo de Mecânica Computacional e Experimental (GMEC) pela infraestrutura.

## Referências

- AMIN, A. F.; ALAM, M.S.; OKUI, Y. An Improved Hyperelasticity Relation in Modeling Viscoelasticity Response of Natural and High Damping Rubbers in Compression: Experiments, Parameter Identification and Numerical Verification. **Mechanics of Materials**, Vol. 34, p.75–95, 2002.
- ASKELAND, D. **Ciencia E Ingenieria de Los Materiales**. Eds: Miguel Ángel Toledo Castellanos, René Garay Argueta and Pedro de la Garza. México. International Thomson Publishing, 3rd ed, 1998.
- BARDENHAGEN, S.G., STOUT, M.G; GRAY, G.T. Three-Dimensional, Finite Deformation, Viscoplastic Constitutive Models for Polymeric Materials. **Mechanics of Materials** 25(4), p.235–253, 1997.
- CARBONE, N. **Desenvolvimento de um Novo Algoritmo para Análise Viscoplastica com o Método dos Elementos de Contorno**. 2007. Dissertação (Escola Politécnica da Universidade de São Paulo), São Paulo, 2007
- CREUS, G. J. Representacion de Materiales Viscoelasticos Con Aplicacion a Estructuras de Hormigon. **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería**. Porto Alegre, Brasil, Vol. 5,1, p125–151, 1989.
- DARIDON, L.; LICHT, C.; ORANKITJAROEN, S.; PAGANO, S. Periodic Homogenization for Kelvin-Voigt Viscoelastic Media with a Kelvin-Voigt Viscoelastic Interphase. **European Journal of Mechanics A/Solids**. Vol. 58, p.163–171, 2016.
- GURTING, M.E.; STERNBERG, E. On the Linear Theory of Viscoelasticity. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**. Vol. 7(1), p.402–11, 1961.
- HASANPOUR, K.; ZIAEI-RAD, S. Finite Element Simulation of Polymer Behaviour Using a Three-Dimensional, Finite Deformation Constitutive Model. **Computers & Structures**. Vol. 86(15–16), p.1643–1655, 2008.
- KHAN, A.; ZHANG, H. Finite Deformation of a Polymer: Experiments and Modeling. **International Journal of Plasticity**. Vol. 17(9): p.1167–1188, 2001.
- LION, A. “A Physically Based Method to Represent the Thermo-Mechanical Behaviour of Elastomers.” **Acta Mechanica**, Vol. 123, 1–25, 1996.
- LION, A. On the Large Deformation Behaviour of Reinforced Rubber at Different Temperatures. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**. Vol. 45(11–12) p.1805–1834, 1997.
- MESQUITA, A. D.; CODA, H. B. Boundary Integral Equation Method for General Viscoelastic Analysis. **International Journal of Solids and Structures**. Vol. 39(9), p.2643–2664, 2000.
- MESQUITA, A. D.; CODA, H. B. Alternative Kelvin Viscoelastic Procedure for Finite Elements. **Applied Mathematical Modelling**. Vol. 26(4), p.501–516, 2002
- REESE, S.; GOVINDJEE, S. A Theory of Finite Viscoelasticity and Numerical Aspects. **International Journal of Solids and Structures**. Vol. 35(26–27), p.3455–3482, 1997.
-

SCHAPERY, R. A. Nonlinear Viscoelastic and Viscoplastic Constitutive Equations Based on Thermodynamics. **Mechanics of Time-Dependent Materials**. Vol. 1, p.209–240, 1997.

TSCHOEGL, N. W. Springer-Verlag **The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior-an Introduction**. 1st ed. Berlin: Springer-Verlag, 1989.