UTILIZAÇÃO DA LÓGICA *FUZZY* NO MODELAMENTO MATEMÁTICO: As Variáveis Lingüísticas e a Abordagem Possibilística

Dario de Almeida Jané
Faculdade Estácio de Sá de Ourinhos
Ourinhos-SP
dariojane@faeso.edu.br

José Arnaldo Barra Montevechi
Universidade Federal de Itajubá
Itajubá-MG
arnaldo@iem.efei.br

Resumo. Este trabalho apresenta uma introdução ao método possibilístico para modelagem matemática de problemas baseado na lógica *fuzzy*. Também chamada de lógica nebulosa, seus conceitos foram introduzidos pelo professor Lotfi Zadeh em 1965, pretende-se demonstrar sua utilização através do uso de termos lingüísticos durante a transformação da informação contida no intelecto humano em conceitos matemáticos lógicos e manipuláveis.Dessa maneira busca-se obter variáveis para os mais diversos modelos matemáticos, que permitam cálculos mais precisos, pois são resultados da interpretação lógica humana em atribuir valores.

Palavras chave: *Fuzzy*, Lógica humana, Possibilística, Variáveis lingüísticas.

Abstract. This work presents an introduction to possibilistic method for mathematical modeling of problems based in logic fuzzy. Also called misty logic, its concepts had been introduced by professor Lotfi Zadeh en 1965, and intend to demonstrate its use through the use of linguistics terms during the transformation of information contained in the human intellect in logical and manipulable mathematical concepts. In this way one searchs to get variables for the most diverse mathematical models that allow more precisious calculations. Therefore are resulted of the logical interpretation human being in attributing values.

Keywords: Fuzzy, Human logical, Possibilistic, linguistic variables.

1 INTRODUÇÃO

A lógica *fuzzy foi* introduzida no contexto científico em 1965 através do professor Lotfi Zadeh, através do artigo *Fuzzy Sets*, quando de sua publicação no *journal Information and Control.*

Segundo Cox [4], os conceitos básicos que justamente diferenciam a lógica *fuzzy* da lógica matemática booleana já existiam anteriormente a Aristóteles. Também no século XIV, William Ockham indagava sobre tais fundamentos. Já no século XX, Max Black e posteriormente Jan Lukasiewicz aprofundaram-se ainda mais no estudo da assim chamada lógica nebulosa.

Assim, com o passar dos anos, a lógica *fuzzy* encontrou aplicação em uma infinidade de áreas, através das quais tem mostrado sua capacidade de adaptação e facilidade de interface com o ser humano.

Conforme Von Altrock [1], pode-se encontrar aplicação para tal em:

- Avaliação de crédito
- Controle de fluxo de caixa
- Controle de estoques
- Avaliação de marketing
- Avaliação de fornecedores
- Controle de Qualidade
- Otimização de inventários
- Análise de risco

Porém diversas outras aplicações recentemente foram alcançadas conforme Yen, Langari e Zadeh [9]. São elas:

- Controle automático de máquinas e equipamentos
- Otimização de processos produtivos complexos

Referenciada por Pinho [8], como um novo ramo da matemática, a lógica *fuzzy* tem como ponto fundamental, segundo Von Altrock [1], a representação da lógica e da racionalidade humana na resolução de problemas complexos.

Chiu e Park [3] afirmam que conforme o grau de incerteza de um problema aumenta, a capacidade de descrição de um modelo para resolução do mesmo decresce. Assim sendo, fez-se necessário o surgimento de uma teoria que fornecesse subsídios para a resolução de problemas com alto grau de incerteza, sem que informações importantes se perdessem durante a manipulação dos dados por incapacidade do modelo matemático em lidar com a incerteza inerente ao mesmo.

2 DEFININDO LÓGICA *FUZZY*

A chamada lógica *fuzzy* ou lógica Nebulosa é definida por Cox [4] como sendo capaz de combinar a imprecisão associada aos eventos naturais e o poder computacional das máquinas para produzir sistemas de resposta inteligentes, robustos e flexíveis.

Kaufmann e Gupta [6] afirmam que a lógica *fuzzy* é composta por conceitos e técnicas que dão a forma matemática precisa ao processo intuitivo humano que na sua grande maioria é caracterizado pela imprecisão e ambigüidade.

Von Altrock [1] enfatiza que a lógica *fuzzy* permite o desenvolvimento de sistemas que representam decisões humanas, onde a lógica e a matemática convencional (booleana) se mostram insuficientes ou ineficientes.

Portanto nota-se a preocupação ao definir o conceito de lógica *fuzzy* em demonstrar seu objetivo principal de aproximar a maneira tal qual o ser humano busca relacionar dados para gerar uma resposta aproximada ao problema analisado. Assim, espera-se através de um modelamento matemático baseado no conhecimento intuitivo humano, resolver problemas complexos e compostos por variáveis cuja informação contida é incerta, de uma maneira organizada e com a máxima confiabilidade possível.

Isso é possível através do uso justamente de variáveis denominadas lingüísticas (grande, pequeno, entre, ao redor de, etc) que conseguem captar a incerteza associada a essas variáveis e traduzi-la para o modelamento matemático. Diferentemente da lógica booleana, a lógica *fuzzy* baseia-se no conceito denominado grau de participação ou função de pertinência (*membership*). O exemplo a seguir (figuras 1 e 2), retirado e adaptado de Von Altrock [1] será utilizado para demonstrar esse conceito, porém sua definição matemática será demonstrada posteriormente.

Neste exemplo, nota-se um conjunto denominado de "pessoas com febre", que através da matemática booleana será definido como sendo o conjunto de elementos (pessoas) cuja temperatura esteja acima de 38° C.

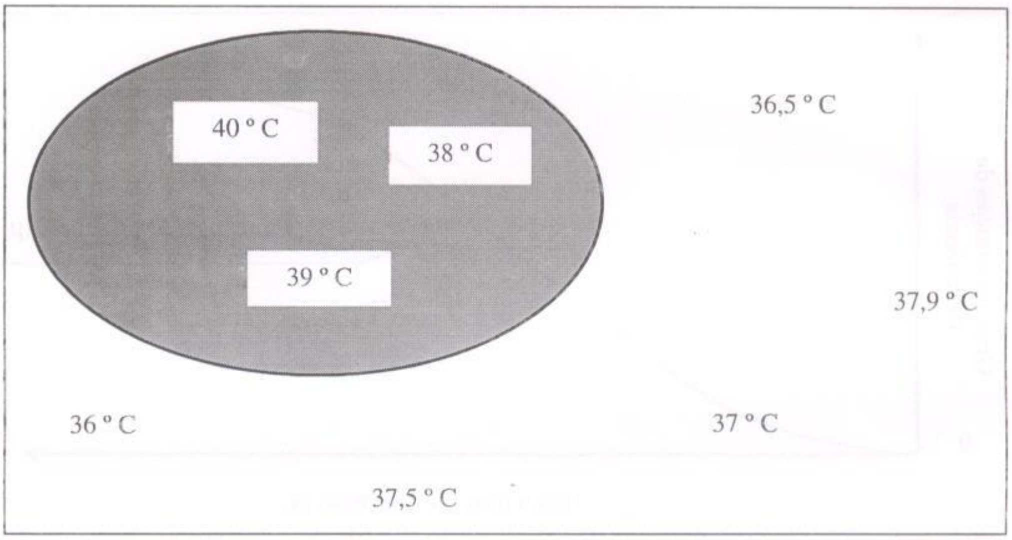

Figura 1: Conjunto de "pessoas com febre" pela lógica booleana

Percebe-se, entretanto, que determinados elementos cuja temperatura estava próxima da temperatura estipulada como limite entre pertencer ou não ao conjunto, porém menor, invariavelmente foram classificados como não pertencentes ao mesmo. Fica claro a existência de uma ruptura abrupta durante a classificação dos elementos que pertencem e dos que não pertencem ao conjunto.

Tal situação não ocorre no conjunto *fuzzy* da figura 2, pois nesse as temperaturas próximas são avaliadas de maneiras diferentes, porém de maneira sutil.

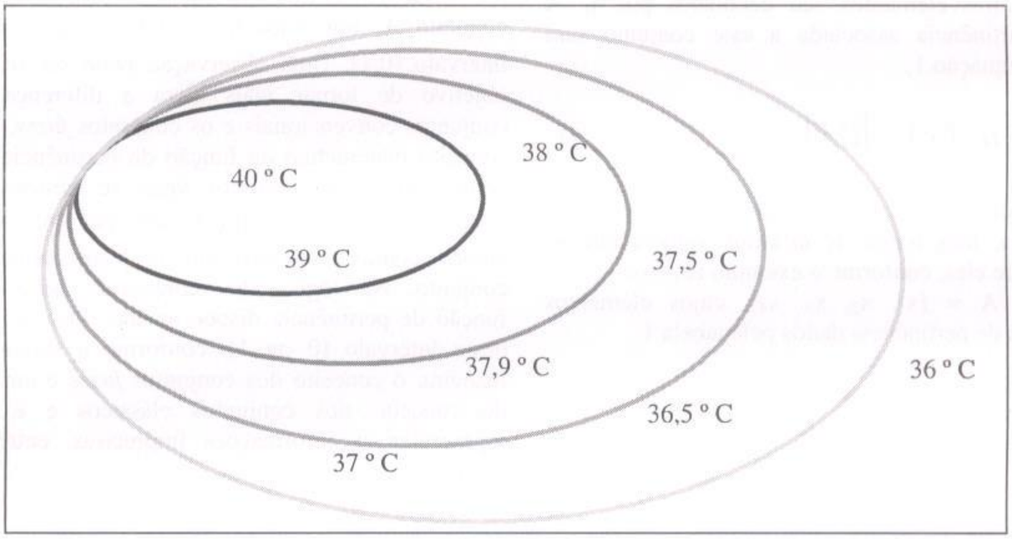

Figura 2: Conjunto de "pessoas com febre" pela lógica fuzzy

Nesse caso, as temperaturas serão classificadas de acordo com o respectivo grau de participação no conjunto de pessoas com febre, ou seja, pode-se dizer que se determinada pessoa estiver com uma temperatura de 37,5° C, possui um grau de pertinência (participação) no conjunto de pessoas com febre igual a 0,6. Da mesma forma, outro indivíduo que apresenta uma temperatura de 39° C, possui um grau de pertinência de 0,9 em relação a este conjunto. Assim, pode-se classificar todos os elementos observados, não mais como pertencentes ou não ao conjunto, mas sim de acordo com seu respectivo grau de pertinência ao conjunto estudado.

3 CONJUNTOS *FUZZY*

Segundo Kaufmann e Gupta [6] um conjunto é a coleção de objetos específicos que possuem determinadas características em comum. Apesar de abstrato, tal conceito será suficiente para se iniciar a definição matemática dos conjuntos *fuzzy*. Cox [4], descreve o conjunto *fuzzy* como sendo o componente básico da lógica *fuzzy*. A figura 3 mostra as três partes que componentes deste conjunto denominado A.

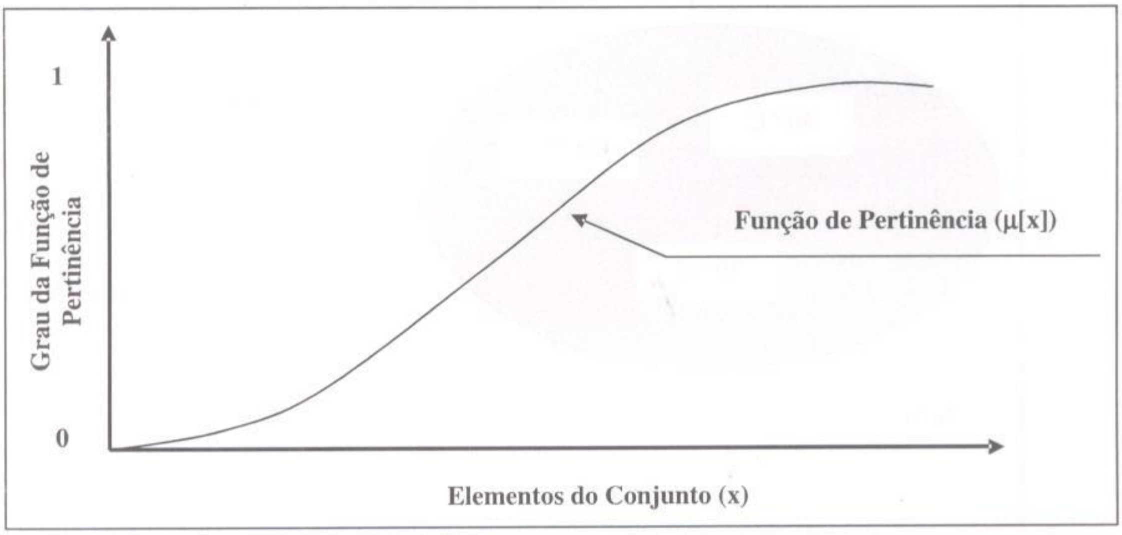

Figura 3: Conjunto fuzzy

Nota-se obviamente a presença dos elementos do conjunto compondo o eixo horizontal, o grau da função de pertinência indicado no eixo vertical, e finalmente a função de pertinência responsável pela conexão entre os dois componentes anteriores.

Seja, entretanto um conjunto *fuzzy* **A**, de um universo **E**, cujos elementos são denotados por $\mathbf{x_i}$. A função de pertinência associada a este conjunto será definida pela equação 1,

$$\forall x \in E : \mu_A(x) \in [0,1] \qquad (1)$$

onde o intervalo identificado [0,1] não inclui somente os valores limites, mas todos os infinitos valores que se encontram entre eles, conforme o exemplo abaixo:

Dado **A** = [x_1, x_2, x_3, x_4], cujos elementos possuem graus de pertinência dados pela tabela 1.

Tabela 1: Elementos do conjunto *fuzzy* A e seus respectivos graus de pertinência.

Elementos	x_1	x_2	x_3	x_4
$\mu_A(x)$	0,15	0,20	0,85	1,0

Esta função associa a cada elemento $\mathbf{x_i}$ do conjunto **A**, um respectivo número $\mu_A(x)$ contido no intervalo [0,1]. Uma observação pode ser feita, com o objetivo de tornar mais clara a diferença entre os conjuntos convencionais e os conjuntos *fuzzy*, através do conceito matemático da função de pertinência: Como já demonstrado, os conjuntos *fuzzy* se caracterizam pela função de pertinência $\mu_A(x)$ que por sua vez associa valores contidos no intervalo [0,1] aos elementos $\mathbf{x_i}$ do conjunto. Na lógica dos conjuntos convencionais, a função de pertinência dispõe apenas dos valores limites deste intervalo [0 ou 1], conforme a figura 4. Desta maneira, o conceito dos conjuntos *fuzzy* é uma extensão do conceito dos conjuntos clássicos e é capaz de representar as informações imprecisas, entre "sim" e "não".

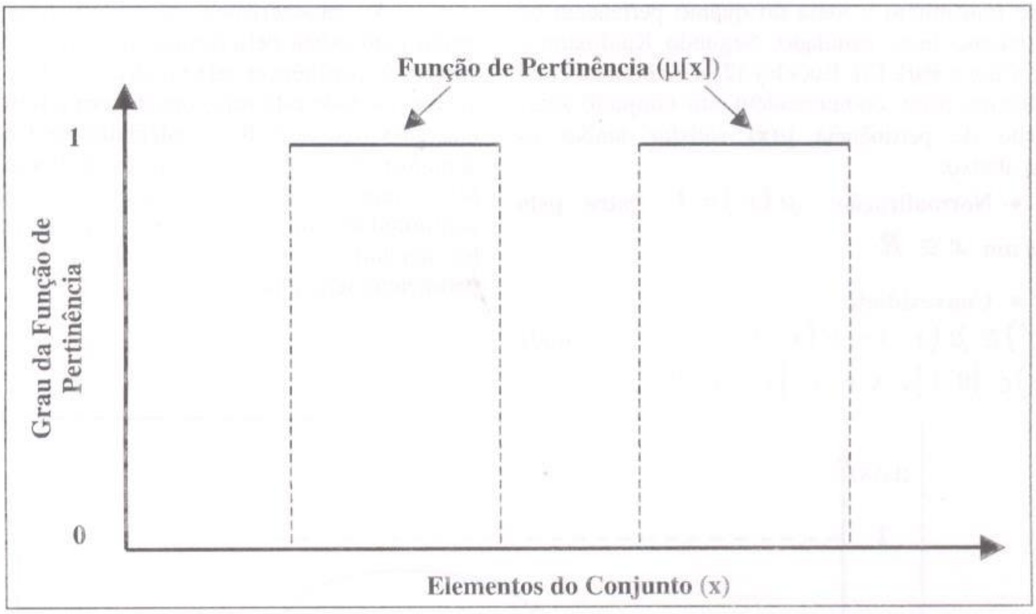

Figura 4: Conjunto Convencional

Pode-se então, representar dois conjuntos *fuzzy* **A** e **B**, através da seguinte notação (equações 2 e 3), comum à literatura específica:

$$A=\{(x,\mu_A(x))\perp\mu_A(x)\in[0,1]\ \} \qquad (2)$$

$$B=\{(x,\mu_B(x))\perp\mu_B(x)\in[0,1]\ \} \qquad (3)$$

Como será visto a seguir, todas as operações entre os conjuntos *fuzzy* estão relacionadas com suas respectivas funções de pertinência.

- **Conjunto *fuzzy* Vazio:** Um conjunto *fuzzy* **A** é considerado vazio (ϕ), se:

$$A=\phi \Leftrightarrow \mu_A(x)=0, \forall x\in E \qquad (4)$$

- **Conjunto *fuzzy* Total:** Um conjunto *fuzzy* **A** é considerado total em um universo **E**, se:

$$A=A(E) \Leftrightarrow \mu_A(x)=1, \forall x\in E \qquad (5)$$

- **Equivalência entre Conjuntos *fuzzy*:** Dois conjuntos *fuzzy* **A** e **B**, são ditos iguais se:

$$A=B \Leftrightarrow \mu_A(x)=\mu_B(x), \forall x\in E \qquad (6)$$

- **Subconjunto *fuzzy*:** O conjunto *fuzzy* **A** é dito subconjunto ou incluído no conjunto *fuzzy* **B** (**A** ⊆ **B**), se:

$$A\subseteq B \Leftrightarrow \mu_A(x)\leq\mu_B(x), \forall x\in E \qquad (7)$$

- **Complemento:** O complemento de um conjunto *fuzzy* **A** ($\overline{A}$) é tal que:

$$\overline{A} \Rightarrow \mu_{\overline{A}}=1-\mu_A, \forall x\in E \qquad (8)$$

- **União entre Conjuntos *fuzzy*:** A união ou reunião de dois conjuntos *fuzzy* **A** e **B** é dada por:

$$A\cup B \Leftrightarrow \mu_{A\cup B}(x)=\max(\mu_A,\mu_B), \forall x\in E \qquad (9)$$

Uma outra maneira de se indicar a operação **max** é através do operador ∨, donde:

$$A\cup B \Leftrightarrow \mu_{A\cup B}(x)=\vee(\mu_A,\mu_B), \forall x\in E \qquad (10)$$

- **Intersecção entre Conjuntos *fuzzy*:** A intersecção de dois conjuntos *fuzzy* **A** e **B** é dada por:

$$A\cap B \Leftrightarrow \mu_{A\cap B}(x)=\min(\mu_A,\mu_B), \forall x\in E \qquad (11)$$

Da mesma maneira uma outra forma de se indicar a operação **min** é através do operador ∧, donde:

$$A\cap B \Leftrightarrow \mu_{A\cap B}(x)=\wedge(\mu_A,\mu_B), \forall x\in E \qquad (12)$$

- **Soma Exclusiva entre Conjuntos *fuzzy*:** A soma exclusiva entre dois conjuntos *fuzzy* **A** e **B** (**A ⊕ B**) é dada por:

$$A\oplus B=(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B) \qquad (13)$$

- **Produto Algébrico entre Conjuntos *fuzzy*:** O produto algébrico entre dois conjuntos *fuzzy* **A** e **B** (**A . B**), é calculado da seguinte forma:

$$A\cdot B \Leftrightarrow \mu_{A.B}(x)=\mu_A(x)\cdot\mu_B(x), \forall x\in E \qquad (14)$$

4 NÚMEROS *FUZZY*

De acordo com Martinez [7] os números *fuzzy* são simplesmente um subconjunto dos números reais, porém com um valor incerto, afinal todo número *fuzzy* está relacionado com diferentes graus de pertinência que na verdade transmitem a idéia do quanto pertencem ou não ao conjunto *fuzzy* estudado. Segundo Kaufmann e Gupta [6], Chiu e Park [3], Buckley [2] e Kahraman *et* all [5] os números *fuzzy* compreendem um conjunto *fuzzy* cuja função de pertinência **μ(x)** satisfaz ambas as exigências abaixo:

- **Normalização:** $\mu(x) = 1$, **para pelo menos um** $x \in R$

- **Convexidade:** $\mu(x') \geq \mu(x_1) \wedge \mu(x_2)$, **onde** $\mu(x) \in [0,1]$ e $\forall x' \in [x_1, x_2]$

A característica de normalização satisfeita implica em existir pelo menos um valor **x**, cuja respectiva função de pertinência seja unitária (1). Já a característica de convexidade está relacionada com a forma do número *fuzzy*. As figuras 5, 6 e 7 adaptadas de Chiu e Park [3] demonstram três conjuntos *fuzzy* distintos. O conjunto *fuzzy* representado pela figura 5 ressalta a não conformidade com a característica normalização, pois não há nenhum elemento do conjunto cuja função de pertinência seja igual à unidade.

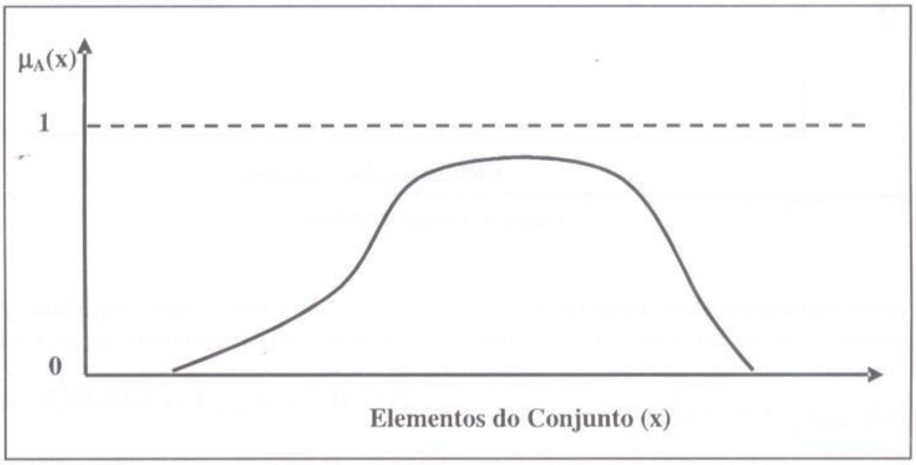

Figura 5: Conjunto fuzzy não-normal

A figura 6 demonstra um conjunto *fuzzy* que não satisfaz a característica da convexidade, pois o valor da função de pertinência para um certo elemento **x'** é menor que o valor mínimo da função de pertinência entre os elementos x_1 e x_2, estando **x'** entre os valores de x_1 e x_2.

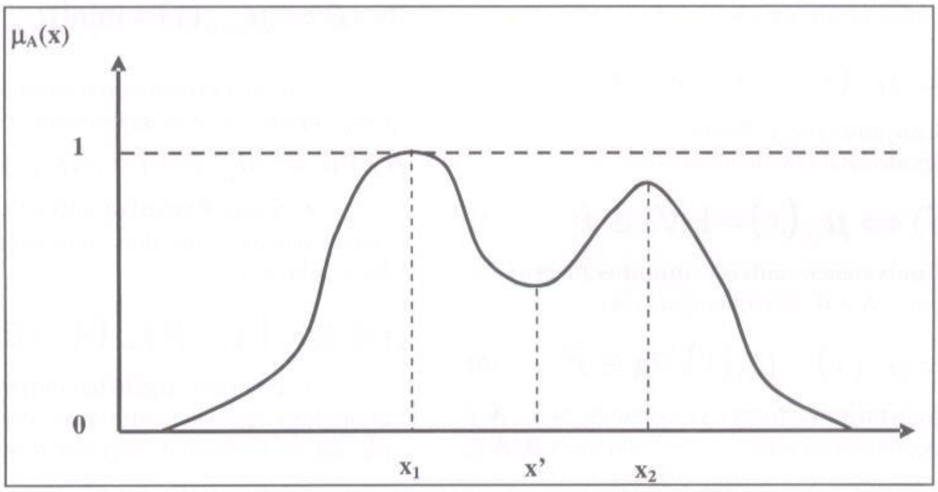

Figura 6: Conjunto fuzzy não-convexo.

A figura 7, entretanto, mostra um número *fuzzy*, pois satisfaz ambas as características destes.

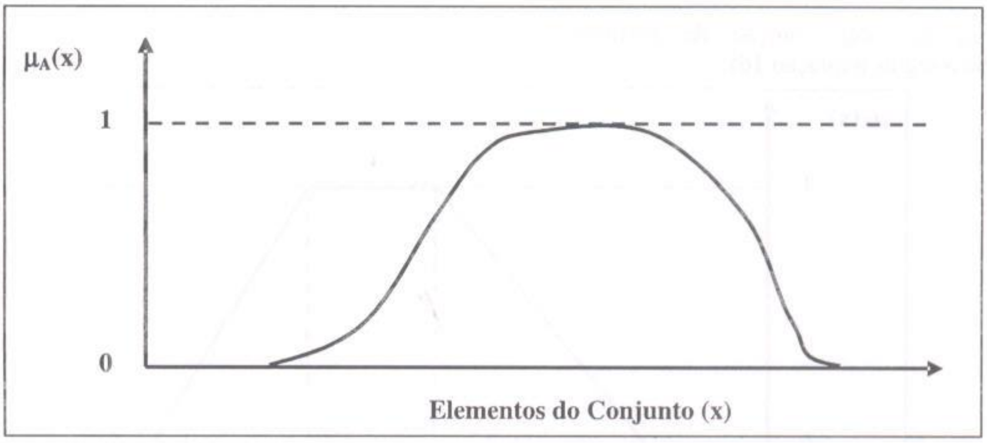

Figura 7: Número fuzzy (Normal e Convexo)

Dentre os vários tipos de números *fuzzy* encontrados na literatura, pelo menos dois tem um destaque todo especial. São eles os números *fuzzy* triangulares (TFN – *Triangular Fuzzy Number*) e os trapezoidais (TrFN – *Trapezoidal Fuzzy Number*).

Número *Fuzzy* Triangular (TFN):

Número *fuzzy* Triangular (TFN) é um tipo especial de número *fuzzy* segundo Chiu e Park (1994). Comumente é apresentado na forma vetorial (**a_1**, **a_2**, **a_3**), onde cada um dos seus três parâmetros está associado com um grau de pertinência 0 ou 1. A figura 8 representa um TFN (**a_1**, **a_2**, **a_3**), cuja função de pertinência está representada a seguir (equação 15).

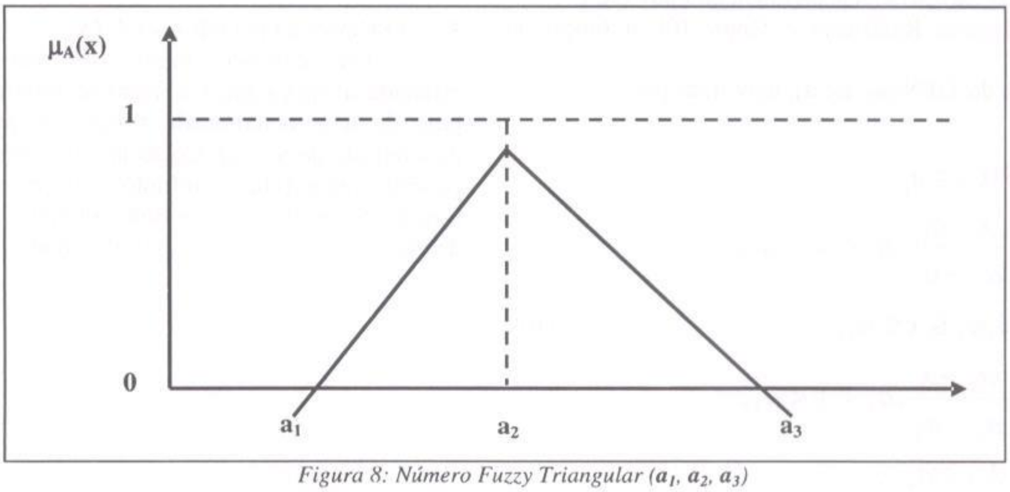

*Figura 8: Número Fuzzy Triangular (**a_1**, **a_2**, **a_3**)*

Para o TFN mostrado na figura 8, atribuí-se pertinência 0 aos valores menores que **a_1** e maiores que **a_3** (indicando nenhuma possibilidade de ocorrer **a_1** e **a_3**). Para o valor **a_2**, a pertinência é igual a 1, indicando possibilidade total de ocorrência deste valor. Aos valores compreendidos entre **a_1** e **a_2** e entre **a_2** e **a_3** são atribuídas pertinências entre 0 e 1. Segundo Kaufmann e Gupta [6], a função de pertinência para um TFN (**a_1**, **a_2**, **a_3**) é dada por:

$$\mu_A(x) = 0, x < a_1$$
$$= \frac{x - a_1}{a_2 - a_1}, a_1 \le x < a_2, \qquad (15)$$
$$= \frac{a_3 - x}{a_3 - a_2}, a_2 \le x < a_3,$$
$$= 0, x > a_3$$

Número *Fuzzy* Trapezoidal: Número *Fuzzy* Trapezoidal (TrFN) também é um tipo especial de número *fuzzy*, porém menos encontrados nos problemas envolvendo análises financeiras. Comumente é apresentado na forma vetorial (**a_1**, **a_2**, **a_3**, **a_4**), onde cada um dos seus quatro parâmetros está associado com um grau de pertinência 0 ou 1. A figura 9 representa um TrFN

(a_1, a_2, a_3, a_4), cuja função de pertinência está representada à seguir (equação 16).

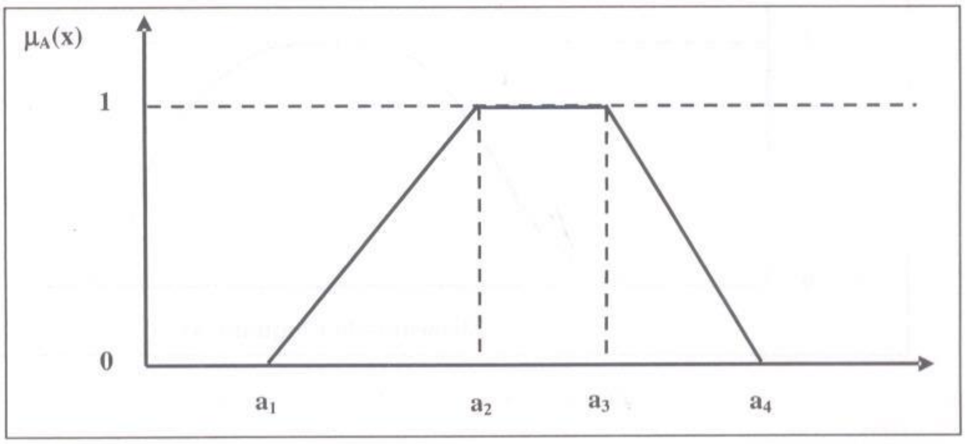

Figura 9: Número Fuzzy Trapezoidal (a_1, a_2, a_3, a_4)

Para o TrFN mostrado na figura 9, atribuí-se pertinência 0 aos valores menores que a_1 e maiores que a_4 (nenhuma possibilidade de ocorrer a_1 e a_4). Para os valores compreendidos entre o intervalo a_2 e a_3 a pertinência é igual a 1 (possibilidade total de ocorrência destes valores). Aos valores compreendidos entre a_1 e a_2 e entre a_3 e a_4, são atribuídas pertinências entre 0 e 1.

Segundo Kaufmann e Gupta [6], a função de pertinência do TrFN (a_1, a_2, a_3, a_4) é dada por:

$$\begin{aligned}\mu_A(x) &= 0, x \le a_1 \\ &= \frac{x-a_1}{a_2-a_1}, a_1 < x < a_2, \\ &= 1, a_2 \le x \le a_3, \\ &= \frac{a_4-x}{a_4-a_3}, a_3 < x < a_4, \\ &= 0, x \ge a_4\end{aligned} \qquad (16)$$

Nota-se, entretanto, que o TFN (a_1, a_2, a_3) pode ser considerado como uma simplificação do TrFN (a_1, a_2, a_3, a_4), com $a_2 = a_3$ neste último.

5 O CONCEITO DE α - *CUTS*

Um conceito muito utilizado na literatura referente a lógica *fuzzy* quando se deseja referenciar o grau de uma determinada função de pertinência é o denominado de α - *cut*. Como já visto anteriormente, este conceito representa os infinitos valores assumidos pela função de pertinência de um conjunto *fuzzy* contínuo dentro do intervalo [0,1], conforme figura 10.

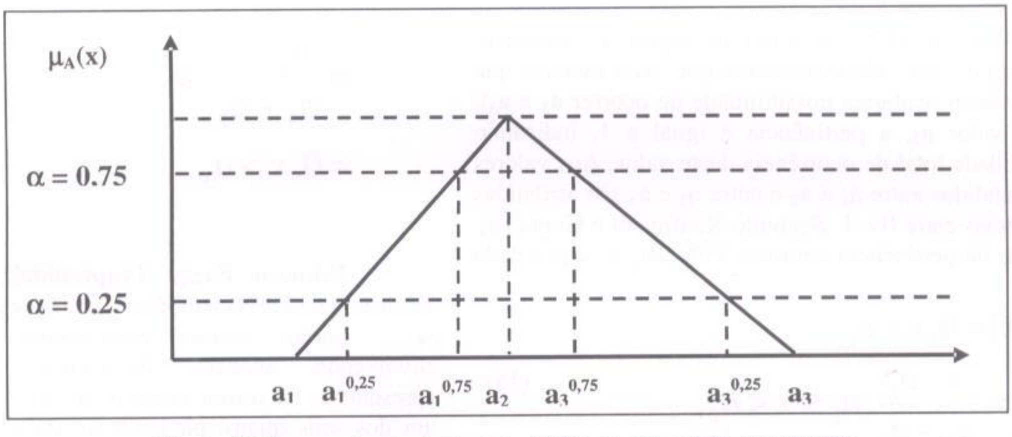

Figura 10: Representação de α - cut = 0,25 e α - cut = 0,75 em um TFN

Pode-se notar então, que dependendo do α - *cut* utilizado, o número *fuzzy* em questão, assumirá valores (intervalos) diferentes, sendo necessária a introdução de uma notação que permita realizar a distinção destes através do α - *cut* desejado. Assim, para um valor α, dado:

$$A_\alpha = \left[a_1^\alpha, a_3^\alpha\right] \tag{17}$$

Kaufmann e Gupta [6], demonstram como este conceito pode ser utilizado na representação dos números *fuzzy*, em especial os TFN's e os TrFN's. Assim temos para os TFN's a seguinte representação (18):

$$\forall \alpha \in [0,1]:$$
$$A_\alpha = \left[a_1^\alpha, a_3^\alpha\right] = \left[(a_2 - a_1)\cdot\alpha + a_1, -(a_3 - a_2)\cdot\alpha + a_3\right] \tag{18}$$

A representação acima, comumente pode ser encontrada da seguinte maneira (19):

$$\forall \alpha \in [0,1]:$$
$$A_\alpha = \left[a^{l(\alpha)}, a^{r(\alpha)}\right] = \left[(a_2 - a_1)\cdot\alpha + a_1, -(a_3 - a_2)\cdot\alpha + a_3\right] \tag{19}$$

Com relação aos TrFN's, a sua representação através dos α - *cuts* é dada por (20):

$$\forall \alpha \in [0,1]:$$
$$A_\alpha = \left[a_1^\alpha, a_3^\alpha\right] = \left[(a_2 - a_1)\cdot\alpha + a_1, -(a_4 - a_3)\cdot\alpha + a_4\right] \tag{20}$$

Da mesma forma, é comum encontrar a representação acima, da seguinte maneira (21):

$$\forall \alpha \in [0,1]:$$
$$A_\alpha = \left[a^{l(\alpha)}, a^{r(\alpha)}\right] = \left[(a_2 - a_1)\cdot\alpha + a_1, -(a_4 - a_3)\cdot\alpha + a_4\right] \tag{21}$$

Onde $a^{l(\alpha)}$, corresponde a representação à esquerda do referido TFN, e $a^{r(\alpha)}$, corresponde a representação à direita do mesmo.

Um exemplo numérico será comentado a seguir, demonstrando tanto para TFN's como para TrFN's o cálculo de suas funções de pertinência e sua representação através dos α - *cuts*.

- **EXEMPLO TFN:** Seja um dado TFN conforme figura 11, definido por $(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}) = (-1, 2, 5)$. A sua função de pertinência e a sua correspondente caracterização através do conceito de α - *cuts* serão:

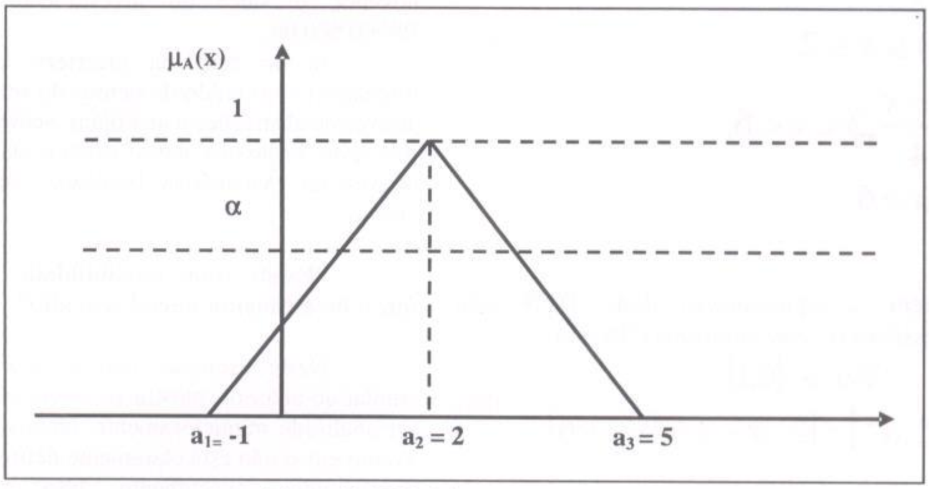

Figura 11: TFN dado por (a_1, a_2, a_3) = (-1, 2, 5)

Segundo (15), sua função de pertinência será:

$$\mu_A(x) = 0, x < -1$$
$$= \frac{x+1}{3}, -1 \le x < 2,$$
$$= \frac{5-x}{3}, 2 \le x < 5, \tag{22}$$
$$= 0, x > 5$$

Também, a representação deste TFN com relação aos possíveis α - *cuts* conforme (18) será:

$$\forall \alpha \in [0,1]: \tag{23}$$

$$A_\alpha = \left[a_1^\alpha, a_3^\alpha\right] = \left[3\cdot\alpha - 1, -3\cdot\alpha + 5\right]$$

- **EXEMPLO TrFN:** Seja um dado TrFN conforme figura 12, definido por $(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}, \mathbf{a_4}) = (-2, 0, 2, 6)$. Sua função pertinência e correspondente caracterização através dos α - *cuts* são:

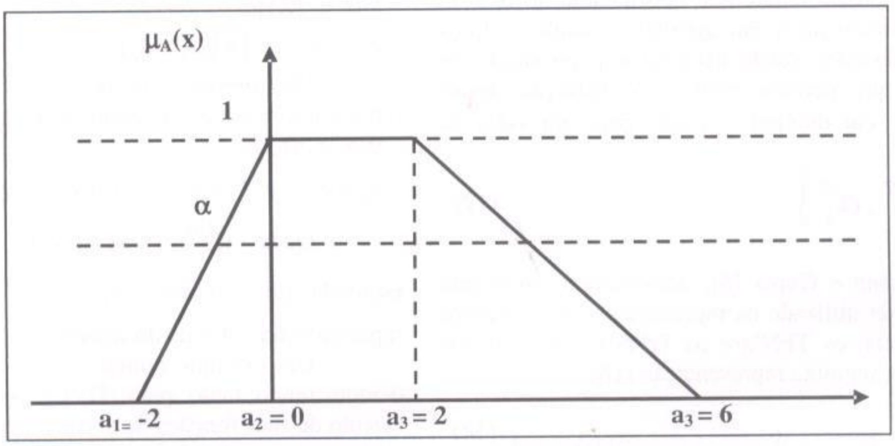

Figura 12: TrFN dado por (a_1, a_2, a_3, a_4) = (-2, 0, 2, 6)

Segundo (16), sua função de pertinência será:

$$\begin{aligned} \mu_A(x) &= 0, x \leq -2 \\ &= \frac{x+2}{2}, -2 < x < 0, \\ &= 1{,}0 \leq x \leq 2, \\ &= \frac{2-x}{4}, 2 < x < 6, \\ &= 0, x \geq 6 \end{aligned} \quad (24)$$

Também, a representação deste TrFN com relação aos possíveis α - *cuts* conforme (20) será:

$$\begin{gathered} \forall \alpha \in [0,1]: \\ A_\alpha = \left\lfloor a_1^\alpha, a_3^\alpha \right\rfloor = [2 \cdot \alpha - 2, -4 \cdot \alpha + 6] \end{gathered} \quad (25)$$

Em ambos os casos, percebe-se que a recuperação da notação inicial dos números *fuzzy* é conseguida através da substituição dos valores de α = 0 e α = 1.

6 INCERTEZA ESTOCÁSTICA X INCERTEZA LÉXICA

A idéia relacionada à incerteza estocástica contida em uma determinada variável corresponde exatamente ao grau de probabilidade de que a informação nela contida seja realmente verdadeira ou não.

A frase seguinte permite que a idéia acima seja exemplificada:

"A probabilidade de o investimento inicial perfazer um total de R$ 900.500,00 é de 90%"

Nota-se que tanto o evento, como sua probabilidade de ocorrência, estão muito bem definidos. Além do mais, a incerteza neste caso, refere-se ao fato da variável investimento inicial, ser ou não igual ao valor de R$900.500,00, ou seja, a cada 100 chances diferentes, em noventa, o valor do investimento inicial seria de R$900.500,00.

Já no caso da incerteza léxica, contida na linguagem e no modo de pensar do ser humano, busca-se através de abstrações e analogias, sentenças que consigam descrever contextos muito difíceis de serem modelados através da matemática booleana, como na afirmação abaixo:

"Existe uma possibilidade muito grande de que o investimento inicial seja alto"

Neste exemplo, que a princípio pode parecer similar ao anterior, mostra-se essencialmente diferente ao ser analisado minuciosamente. Nota-se que na verdade o evento em si não está claramente definido. O que pode ser considerado investimento alto para determinado investidor, não será assim entendido por outro, pois esses possuem diferentes interpretações para esta variável. Além disso, o termo probabilidade não se adequaria neste caso, e sim o termo possibilidade, visto que a incerteza não está relacionada em ser o investimento inicial exatamente alto ou baixo, mas sim que o valor admitido por esta variável tem, dentro da sua possível distribuição de possibilidades, grande chance de ser alto. Não é de se estranhar então, que tais variáveis sejam extremamente importantes na aplicação de soluções baseadas na lógica *fuzzy* em problemas reais. Porém, se de um lado tem-se a incerteza associada ao pensamento humano, deve ser levado em consideração, que somente existirá benefício através da adição de informações ao problema real analisado, caso esta possa ser expressa de maneira tal, que possibilite ao sistema efetuar cálculos e/ou aproximações com estes valores. Desta forma, percebe-se a importância de um componente do sistema baseado na lógica *fuzzy* responsável pela interface entre as variáveis lingüísticas, e sua interpretação matemática. Tal elemento é chamado de função de pertinência, conforme já analisado na seção 2.

7 VARIÁVEIS LINGUÍSTICAS

Segundo Von Altrock [1], as chamadas variáveis lingüísticas constituem o "vocabulário" da lógica *fuzzy*, trazendo toda a incerteza presente no pensamento e na expressão oral do ser humano para sistemas de decisão que priorizam o padrão e respeitam determinada metodologia durante o cálculo computacional envolvido. Essa característica excepcional encontrada na lógica *fuzzy*, só é possível, porque considera a parcela de informação relativa não à incerteza estocástica, mas sim a chamada incerteza léxica presente em qualquer problema real analisado em que estejam envolvidas variáveis lingüísticas. Pinho [8] cita a necessidade de que especialistas da área estudada sejam consultados durante a atribuição de valores relacionados aos graus de pertinência para cada uma das variáveis em estudo, buscando maior precisão nos resultados. As figuras 16 e 17 exemplificam o processo de fuzzificação das informações relativas à idade e altura de um indivíduo, através de três funções de pertinência:

- Variável Idade :) XQões de pertinência: criança, adulto e idoso.
- Variável Altura :) XQões de pertinência: baixo, mediano e alto.

Tabela 2: Atribuição de valores à variável lingüística idade.

Idade (anos)	Valor atribuído para a variável lingüística (grau de pertinência)	Vetor Grau de pertinência (Criança; Adulto; Idoso)
10	Criança =1,0 Adulto =0,0 Idoso =0,0	{1,0 ; 0,0 ; 0,0}
17	Criança =0,5 Adulto =0,5 Idoso =0,0	{0,5 ; 0,5 ; 0,0}
23	Criança =0,0 Adulto =1,0 Idoso =0,0	{0,0 ; 1,0 ; 0,0}
41	Criança =0,0 Adulto =0,5 Idoso =0,5	{0,0 ; 0,5 ; 0,5}
60	Criança =0,0 Adulto =0,0 Idoso =1,0	{0,0 ; 0,0 ; 1,0}

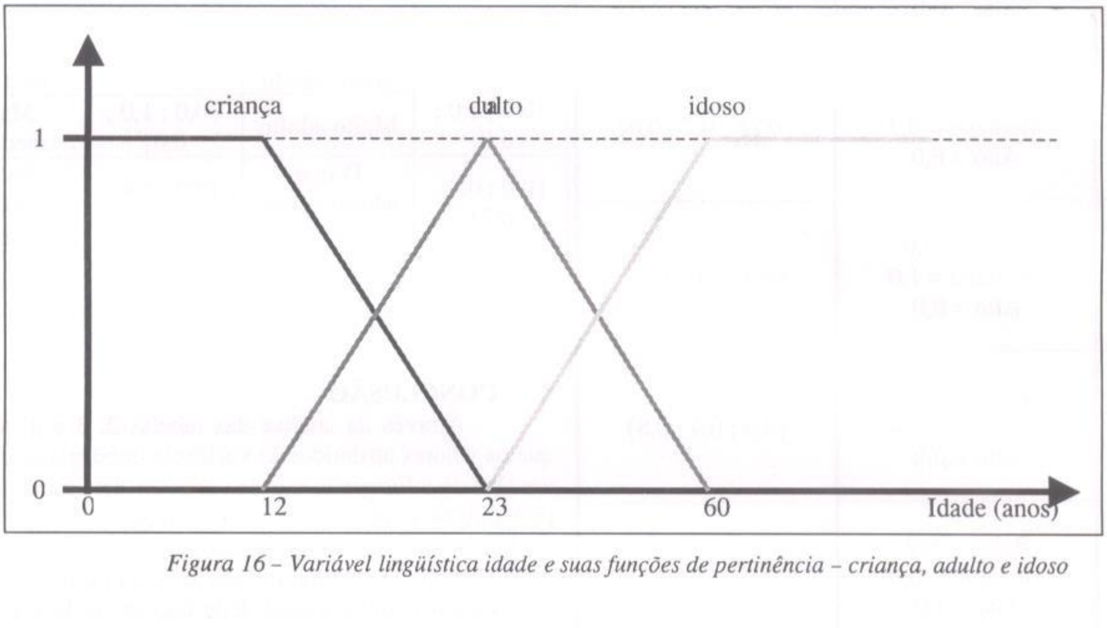

Figura 16 - Variável lingüística idade e suas funções de pertinência - criança, adulto e idoso

Nota-se, portanto, que as informações iniciais referentes ao valor numérico da idade e da altura de um indivíduo, através do processo de fuzzificação são transformadas em variáveis lingüísticas, podendo a partir deste momento serem utilizadas em um processo seguinte de cálculo, denominado inferência. A tabela 2 expressa essa variável lingüística, em função do vetor grau de pertinência.

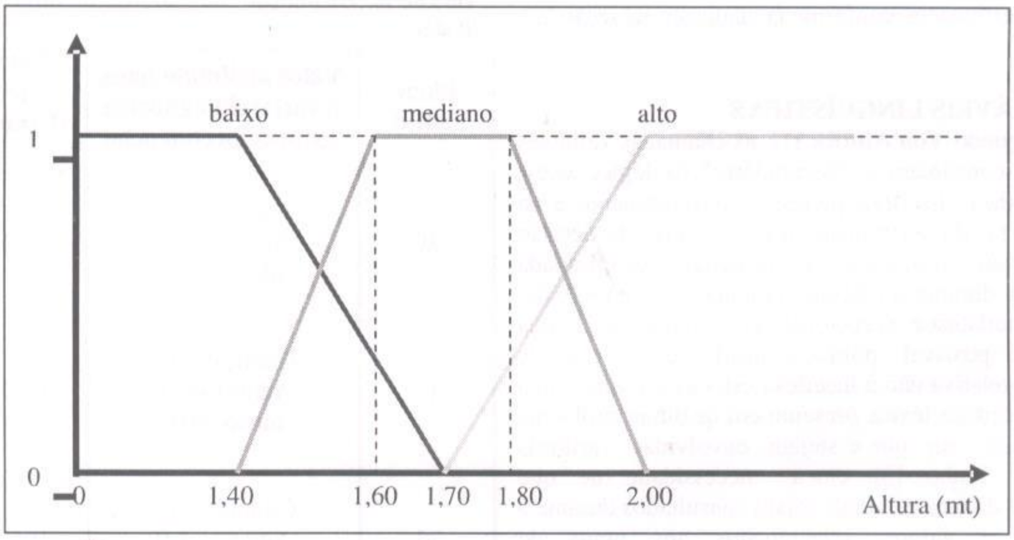

Figura 17 – Variável lingüística altura e suas funções de pertinência – baixo, mediano, alto

Tabela 3: Atribuição de valores à variável lingüística altura.

Altura (mt)	Valor atribuído para a variável lingüística (grau de pertinência)	Vetor Grau de pertinência (Baixo ; Mediano ; Alto)
1,00	Baixo = 1,0 Mediano = 0,0 Alto = 0,0	{1,0 ; 0,0 ; 0,0}
1,45	Baixo = 0,85 Mediano = 0,2 Alto = 0,0	{0,85 ; 0,2 ; 0,0}
1,70	Baixo = 0,0 Mediano = 1,0 Alto = 0,0	{0,0 ; 1,0 ; 0,0}
1,85	Baixo = 0,0 Mediano = 0,4 Alto = 0,8	{0,0 ; 0,4 ; 0,8}
2,10	Baixo = 0,0 Mediano = 0,0 Alto = 1,0	{0,0 ; 0,0 ; 1,0}

Outra maneira de se representar o valor de uma variável lingüística seria também através de palavras, ao invés dos vetores de graus de pertinência, conforme a tabela 4:

Tabela 4: Representação lingüística para os vetores de graus de pertinência.

Variável Idade		**Variável Altura**	
Vetor Grau de Pertinência	Valor Lingüístico	Vetor Grau de Pertinência	Valor Lingüístico
{1,0 ; 0,0 ; 0,0}	Muito criança	{1,0 ; 0,0 ; 0,0}	Muito baixo
{0,5 ; 0,5 ; 0,0}	Pouco criança, quase adulto	{0,85 ; 0,2 ; 0,0}	Baixo, pouco mediano
{0,0 ; 1,0 ; 0,0}	Muito adulto	{0,0 ; 1,0 ; 0,0}	Muito mediano
{0,0 ; 0,5 ; 0,5}	Pouco adulto, quase idoso	{0,0 ; 0,4 ; 0,8}	Pouco mediano, alto
{0,0 ; 0,0 ; 1,0}	Muito idoso	{0,0 ; 0,0 ; 1,0}	Muito alto

8 CONCLUSÃO

Através da análise das tabelas 2, 3 e 4, nota-se que os valores atribuídos às variáveis lingüísticas, contém um tipo de informação que as variáveis determinísticas ou probabilísticas desconhecem. Informações do tipo muito adulto, pouco criança, quase idoso, comuns no dia-a-dia, perdem parte do seu significado ao serem transcritas para a matemática convencional. Este fato se verifica devido à própria natureza das variáveis em uso, que está alicerçada na teoria dos conjuntos booleanos, onde um dado ou um conjunto de dados pertence ou não ao conjunto analisado, inexistindo valores intermediários relacionados à sua participação no conjunto analisado. Nesse contexto, pode-se enxergar os benefícios que a modelagem matemática baseada na lógica *fuzzy* pode proporcionar, ao oferecer possibilidades infinitas de classificação de um determinado valor, dentro do domínio de sua função de pertinência. Assim, torna-se mais precisa a avaliação e transcrição de uma informação relevante ao modelo, da sua forma inicial, e muitas vezes informal, para padrões que permitirão seu manuseio e conseqüentemente benefício para os resultados finais gerados. A informação contida nessas variáveis permite que os valores *fuzzy* quando utilizados em modelos matemáticos reais, possibilitem cálculos mais apurados e precisos, além de favorecer o uso das chamadas variáveis lingüísticas, conforme demonstrado na seção 6. Nota-se, entretanto, a necessidade da figura do especialista, quando tais valores forem atribuídos, e também do desenvolvimento de uma teoria específica para manuseio destes dados. Algumas relações entre números *fuzzy*, foram demonstradas, inclusive com respeito aos TFN's e TrFN's, por se tratarem dos mais conhecidos e utilizados números *fuzzy*. Conclui-se então da importância assumida nos últimos anos pela teoria dos conjuntos *fuzzy*, aplicada principalmente ao modelamento de sistemas reais, buscando aproximar a maneira racional e lógica utilizada pelo ser humano, analisa e imputa valores às variáveis relacionadas.

REFERÊNCIAS

[1] VON ALTROCK, Constantin. *Fuzzy logic and neuroFuzzy applications in busines and finance*. New Jersey: Prentice Hall PTR, 1996.

[2] BUCKLEY, J. J. The fuzzy mathematics of finance. *Fuzzy Sets and Systens* Vol 21, 257-273, 1987.

[3] CHIU, Chui-Yu; PARK, Chan S. Fuzzy cash flow analysis using present worth criterion. *The Engineering Economist* Vol 39, 113-137, 1994.

[4] COX, Earl. *Fuzzy logic for business and industry*. Massachusetts: Charles River Media Inc, 1995.

[5] KAHRAMAN, Cengiz; at all. Capital budgeting techniques using discounted fuzzy versus probabilistic cash flows. *Information Sciences* Vol 142, 57-76, 2002.

[6] KAUFMANN, Arnold; GUPTA, Madan M. *Fuzzy mathematical models in engineering and management science*. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B. V., 1988.

[7] MARTINEZ JÚNIOR, Luiz Carlos. *Modelo de análise de investimentos baseado em sistema especialistas e lógica fuzzy*. 2002. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002.

[8] PINHO, Alexandre F. *Uma contribuição para a resolução de problemas de programação de operações em sistemas de produção intermitentes flow-shop – A consideração de incertezas*. 1999. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 1999.

[9] YEN, John; LANGARI, Reza; ZADETH, *Lotfi A. Industrial applications of fuzzy logic and intelligent systems*. New York: IEEE Press, 1994.